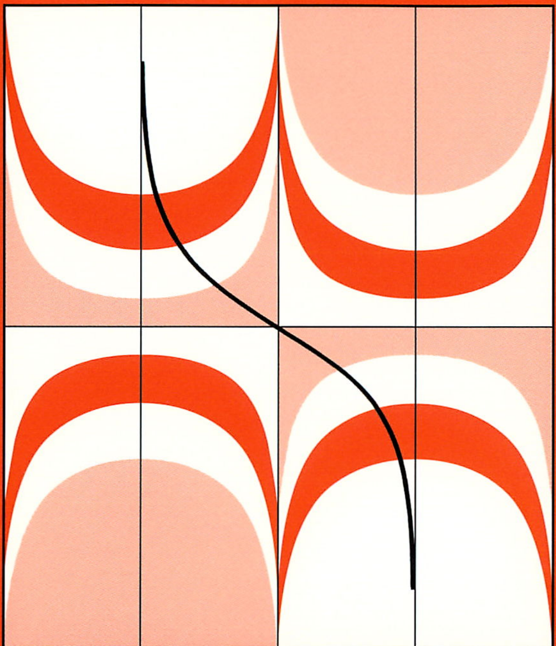
物理のための数学入門

複素関数論

有馬朗人・神部　勉　著



共立出版株式会社

物理のための数学入門

複素関数論

有馬朗人・神部　勉 著

共立出版株式会社

まえがき

この本の著者の一人有馬朗人は，1978 年から 3 年間，物理学科の第 2 学年の冬学期で物理数学を教えた．その内容は複素関数論，特殊関数論，常微分方程式，積分方程式，超関数，フーリエ変換，ラプラス変換等であった．週 3 時間であったから，かなり盛りだくさんなものであった．さまざまな良書がすでに世に出ていて，それぞれの項目について教科書のどれかを用いれば済むかと思って，講義の準備をしてみたが，なかなかちょうど良いものが見つからなかった．それで結局，自分なりの講義用ノートを作ったのであった．このノートは乱暴に書いてあったが，何人かの学生諸君がきれいに清書してくれた．それを複写して学生諸君に渡す約束であった．しかし複写する段になると，さまざまな所へ手を入れたくなる．少しずつ手なおしをしているうちに，この講義をすることがなくなってしまった．その後も物理数学の講義をする機会を与えられたが，それは群論を中心にしたものであった．

数年後，神部　勉さんが同じ講義をやはり 3 年間受け持つことになった．そのとき私の講義ノートを参考までにさしあげたのである．神部さんは専門が流体力学で，その基本方程式であるナヴィエ・ストークス方程式の特解を発見するという仕事をした人である．したがって物理数学の基本的な部分，特に複素関数論や，微分方程式論に通暁している．そこで私のつたないノートなどは全く不必要であったにちがいない．ただ私は，神部さんに勉強しやすい，そして読みやすい教科書を書くことをすすめたかったのである．また私のノートには 3 年間の講義において学生諸君から聞いた質問や意見に従って，いささかの工夫を加えてあったので，何か神部さんが講義を進め，教科書を書くときの参考になればと思ったのであった．

神部さんの専門は上記のように流体力学，私のは原子核理論である．私も物

理数学にはたいへん世話になったが，中心は群論とその応用および特殊関数とくに球関数である．したがって複素関数や微分方程式などについての私のノートは，不完全きわまるものであったにちがいない．しかしやや専門でないものが，自分も勉強しながら講義をしたという経験もまた貴重であると思う．したがってこのノートには，専門家が自明とすることであるにもかかわらず，初めて学ぶ者がいささか苦労するようなところを，講義をする者が追体験しながら話を進めるというようなところがあったと思う．

それから数年たって，神部さんがきちんと書き上げられたこの複素関数論の原稿を見て私は驚いた．ここで私のノートは全く換骨奪胎され，整然としたものになっていたのであった．これが本書が世に出るに至ったいきさつである．

このようにややくわしくいきさつを書いた理由は，実はこの話が本書の特徴をよく示していると思うからである．すなわち著者 2 人が物理数学の専門家ではなく，それを応用して研究を進めていること，また 2 人の専門分野が流体力学と原子核理論とかなり違っていることを強調したかったのである．このように複素関数論の利用者が利用者のために書いたものであることが本書の大きな特徴である．そこでさまざまな定理の証明などは，一方でなるべく簡単にするが，他方ではわかりやすくなるように努力した．また内容はあまり複雑多岐にわたることを避け，応用上必要最少限のものにしぼったつもりである．また重要な定理の後には，それを利用する例題をなるべく多く加えておいた．例題を通じて定理についての理解が深まると信じている．

各章ごとに章末に 10 題前後の演習問題を出しておいた．この中には基本的でよく知られているものもあるが，新たに工夫して作った面白い問題も多いと思う．読者諸君がこれらの問題をなるべくたくさん解いて，学んだことを完全に身に着け，応用力を高めていただきたい．

最近，コンピューターによって計算が短時間にできるようになった．またその結果を図に描くことも容易になった．この利点を利用して，他の教科書にはまだないような新しい図をたくさん入れておいた．このような図も本書の内容を理解するために役立つと思う．

物理数学とか複素関数論というと，初めての人にはとっつきにくいかもしれない．しかしすこしがまんして読んで下されば，面白いものだと思われるよう

になるであろう．この本が複素関数論への良い道案内になることを期待している．

この本が出版されるまでには編集部の豊田秀一さんにたいへんお世話になった．辛抱強く原稿のでき上がるのを待ち，時どき著者らを励ましてくれた．ここに感謝の意を表しておく．

1991年9月10日

有馬　朗人

目　次

1. 複素数と数列

1.1 複素数と複素平面

実数を含むもっと広い数の概念の拡張として複素数が導入される．実数だけに限定するとき，例えば次のような困難が生ずる．2次方程式 $x^2+1=0$ を満足する解 x は，その2乗が-1に等しくなければならない．実数の中にはそのような数は存在しない．この数を表現するために，数 i が導入される．

数 i は $i^2=-1$ を満足し，$i=\sqrt{-1}$ とも書かれ，虚数単位(imaginary unit)とよばれる．上の方程式の根は，i を用いて $x=i$ (または $-i$)と表わせる．また別の2次方程式 $x^2-2x+3=(x-1)^2+2=0$ の根は $x=1+i\sqrt{2}$ (または $1-i\sqrt{2}$)と書くことができる．この数は，2つの実数1，$\sqrt{2}$ で表わされている．このような数は複素数とよばれる．

一般に，任意の2つの実数(real numbers) a，b および虚数単位 i によって1つの複素数(complex number) c が次のように定義される：

$$c=a+ib$$

a を c の実部 (real part)，b を虚部 (imaginary part) とよび，$a=\mathrm{Re}\,c$，$b=\mathrm{Im}\,c$ と書く．複素数の導入によって2次方程式の根が単に表現できるだけでなく，2次方程式は常に2つの根(重根も2つと数える)をもつことが保証される．一般に n 次多項式は，複素数の範囲内で n 個の根を有することが示される (7章)．また，指数関数と三角関数は複素数の世界では兄弟のような関係にあることも明らかとなるばかりでなく，主値積分の意味もより明確となってくる．複素数の導入によって，実数にはなかった完全さおよび隠れていた意味が明らかになることのために，複素数および複素関数は基本的であると考えられる．

平面上に直角座標$(x,\ y)$をとり，横座標を x，縦座標を y とする．この平面上の点$(a,\ b)$を複素数 c に対応させることができる(図1.1)．一般に平面上の

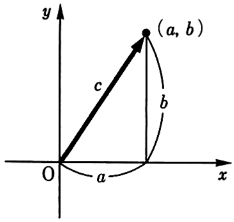


図 1.1

点 $(x,\ y)$ によって，複素数

$$z=x+iy$$

が表わされる．この平面を複素面 (complex plane)，ガウス・アルガン (Gauss-Argand) 平面，あるいは単にガウス (Gauss) 平面という．また単に z 面ともいう．z 面上で原点 O から点 z までの距離 r を z の絶対値 (absolute value, modulus) といい，$|z|$ で表わす：

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}$$

また線分 $\overline{\mathrm{Oz}}$ が x 軸となす角度 θ は z の偏角 (argument) といい

$$\arg z=\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

と書く．横軸 (x 軸)，縦軸 (y 軸) はそれぞれ実軸，虚軸という (図 1.2)．

絶対値 r と偏角 θ を用いると

$$x=r\cos\theta, \qquad y=r\sin\theta \tag{1.1}$$

であるから，z を次の極形式 (polar form)

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta} \tag{1.2}$$

の形に書くことができる．2 番目の等式には式 (2.28) の関係を使った．複素数 $z=x+iy$ に対して

$$\bar{z}=x-iy=r(\cos\theta-i\sin\theta)=re^{-i\theta} \tag{1.3}$$

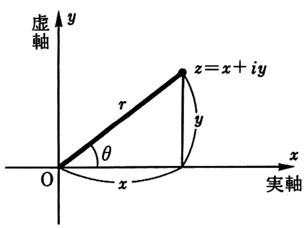


図 1.2

を z の共役(conjugate)複素数という．$z+\bar{z}=2x$，$z-\bar{z}=2iy$ であるから

$$\mathrm{Re}\,z=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\qquad \mathrm{Im}\,z=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$$

である．

2つの複素数 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$ が等しいとは，$x_1=x_2$，$y_1=y_2$ が同時になりたつときで，そのときに限り z_1 と z_2 は等しいといい，$z_1=z_2$ と書く．このときには，z_1 と z_2 は複素面上で同じ点を表わしている．特に複素数 $z=x+iy=0$ は $x=0$，$y=0$ を意味する．2つの数 z_1，z_2 の和および差は

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2) \tag{1.4}$$

すなわち，実部および虚部それぞれの和および差として定義される．

2つの数 z_1，z_2 の積は

$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2) \tag{1.5}$$

で定義される．2番目の等式は,実数演算と同じように分配則と $i^2=-1$ を適用することによって示される．z_1，z_2 の絶対値および偏角をそれぞれ (r_1,θ_1)，(r_2,θ_2) として，式(1.1)の関係を用いると

$$x_1x_2-y_1y_2=r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)=r_1r_2\cos(\theta_1+\theta_2)$$

$$x_1y_2+x_2y_1=r_1r_2(\cos\theta_1\sin\theta_2+\cos\theta_2\sin\theta_1)=r_1r_2\sin(\theta_1+\theta_2)$$

となるので

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2))\\&=r_1r_2\,\mathrm{e}^{i(\theta_1+\theta_2)}\end{aligned} \tag{1.6}$$

と表わせる．すなわち，積 z_1z_2 の絶対値はそれぞれの数の絶対値の積 r_1r_2 に等しく，偏角は和 $\theta_1+\theta_2$ に等しい．特に，z^n は

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta) \tag{1.7}$$

と書ける．$z=r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ とその共役複素数 $\bar{z}=x-iy=r\mathrm{e}^{-i\theta}$ の積 $z\bar{z}$ は

$$z\bar{z}=r^2=x^2+y^2=|z|^2 \tag{1.8}$$

で与えられ，実数値(正または0)をとる．

第3の複素数 $z_3=x_3+iy_3$ に対し $z_2z_3=z_1$ の関係があるとき,商 z_1/z_2 は z_3 で定義される：

$$z_3=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2{}^2+y_2{}^2}+i\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2{}^2+y_2{}^2} \tag{1.9}$$

最後の等号は，分母・分子に $\bar{z}_2$ を乗じた式 $z_1\bar{z}_2/z_2\bar{z}_2=z_1\bar{z}_2/|z_2|^2$ から得られる．z_1，z_2 の積の極形式(1.6)を得たのと同様の方法で，商に対し

$$z_3=\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{i(\theta_1-\theta_2)} \tag{1.10}$$

の関係を示すことができる（演習問題１の１)．商の絶対値は分子・分母の絶対値の商 r_1/r_2 に等しく，偏角は分子・分母の偏角の差 $\theta_1-\theta_2$ に等しい．

上に定義した複素数の四則演算 (1.4)，(1.5)，(1.9) は右辺の実数演算で与えられることから，次のように実数と同様の交換則・結合則・分配則がなりたつ：

$$\left.\begin{aligned} z_1+z_2&=z_2+z_1\\ (z_1+z_2)+z_3&=z_1+(z_2+z_3)\\ z_1z_2&=z_2z_1\\ (z_1z_2)z_3&=z_1(z_2z_3)\\ z_1(z_2+z_3)&=z_1z_2+z_1z_3 \end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

和，積，商の複素共役は個々の構成要素の複素共役の和，積，商に等しいことは，定義から容易に確かめることができる．例えば

$$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2,\qquad \overline{z_1{}^2z_2}=\bar{z}_1{}^2\bar{z}_2,\qquad \overline{z_1{}^n/z_2{}^m}=\bar{z}_1{}^n/\bar{z}_2{}^m$$

等である（演習問題１の２)．

幾何学的には，共役複素数 $\bar{z}=x-iy$ は実軸に関し点 $z=x+iy$ の鏡像点になる(図1.3(a))．和の規則(1.4)は z_1+z_2 が z_1 と z_2 のベクトル的な和(実部，虚部おのおのの和)を意味する(図1.3(b))．差は $z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$ であるから，式(1.8)より

$$|z_1-z_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \tag{1.12}$$

すなわち，$|z_1-z_2|$ は２点 $z_1(x_1,y_1)$，$z_2(x_2,y_2)$ 間の距離を表わす(図1.3(c))．特に実数 a，複素数 c に対し，方程式 $|z-c|=a$ は，２点 z，c 間の距離が a に等しいことを意味する．点 z は中心 c，半径 a の円上になければならない(図1.3(d))．３つのベクトル z_1，z_2，z_1+z_2 は三角形をつくるので，次の三角不等式がなりたつ：

$$|(|z_1|-|z_2|)|\leqq|z_1+z_2|\leqq|z_1|+|z_2| \tag{1.13}$$

一般に n 個の複素数 $z_1,\cdots,z_n$ に対しては

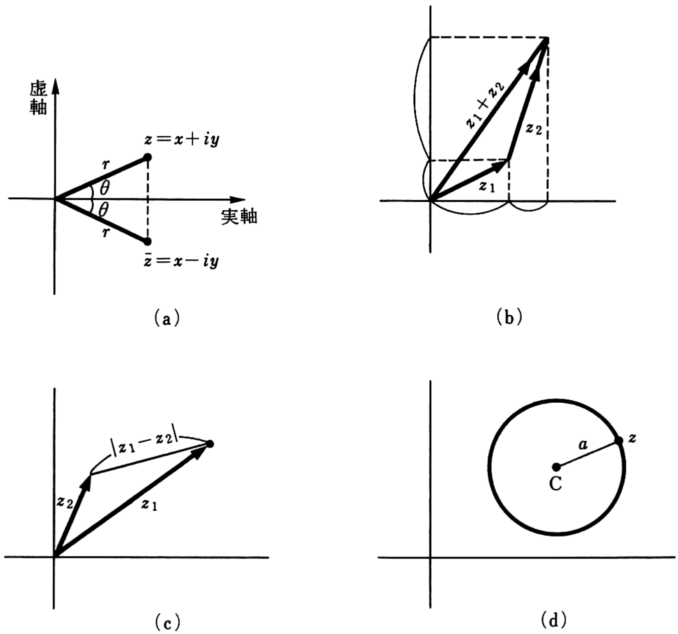


図 1.3

$$|z_1+z_2+\cdots\cdots+z_n|\leqq|z_1|+|z_2|+\cdots\cdots+|z_n| \tag{1.14}$$

となる（演習問題 1 の 3）.

任意の複素数 $z=x+iy$ は 2 つの実数の組 (x, y) によっても表わすことができる．成分 x，y は順序づけられているものとする．2 つの数 (x_1, y_1) と (x_2, y_2) の和および積は (x_1+x_2, y_1+y_2) および $(x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+y_1x_2)$ で定義される．商は式(1.9)の最右辺の式の第 1，2 項を各成分とするものとする．上のように定義すると，数 $(0, 1)$ の 2 乗は $(-1, 0)$ で与えられ，これは $i^2=-1$ に対応する．このようにして，i を使わずに複素数の演算を行なうことができる．この方法の利点は，成分の数を 3 個，4 個，……と増やして一般化できることである．特に 4 元数(quaternion)はよく知られている．

1.2　数列と級数

複素数の数列 $\{z_n\}$ を考えよう：

$$z_1,\ z_2, \cdots\cdots,\ z_n, \cdots\cdots$$

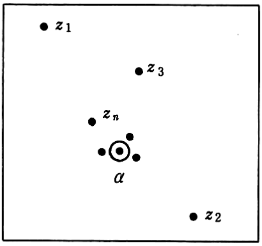


図 1.4　点 α に収束する点列 $z_n(n=1, 2, \cdots)$

各要素 z_n を x_n+iy_n で表わすと，$\{z_n\}$ は複素面上の点列(x_n, y_n)とみなせる(図 1.4)．番号 n が限りなく大きくなるとき(すなわち $n\to\infty$ のとき)，z_n がある複素数 α に限りなく近づくなら，すなわち $|z_n-\alpha|\to 0$ ならば，数列 $\{z_n\}$ は α に収束するといい，α を z_n の極限とよび，これを

$$\lim_{n\to\infty} z_n=\alpha$$

と記す．あるいは

$$n\to\infty \quad のとき，\ z_n\to\alpha$$

と書くこともある．このとき，明らかに点 z_n と α の距離は z 面上で限りなく小さくなり，点 z_n は極限点 α のまわりに集積する．

これをもっと詳しく表現すると，任意の正の数 ε が与えられたとき(どんなに小さくてもよい)，それに対応して 1 つの番号 N(ε に依存する)が定まり

$$n>N \quad ならば \quad |z_n-\alpha|<\varepsilon \tag{1.15}$$

であるとき，z_n は α に収束する (converge) という．極限点 α は集合 $\{z_n\}$ に属するとは限らない．極限が存在しない場合は発散する (diverge) という．このように，点 α にいくらでも近いところに $\{z_n\}$ に属する点が無数にあるとき，α を集積点という．

極限値に関しては次の性質がある．2 つの数列 $\{a_n\}\{b_n\}$ が収束するならば

$$\left.\begin{aligned}
&(\mathrm{i}) && \lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\pm\lim_{n\to\infty}b_n\\
&(\mathrm{ii}) && \lim_{n\to\infty}\ a_nb_n\ =(\lim_{n\to\infty}a_n)(\lim_{n\to\infty}b_n)\\
&(\mathrm{iii}) && \lim_{n\to\infty}\ \frac{a_n}{b_n}\ =(\lim_{n\to\infty}a_n)/(\lim_{n\to\infty}b_n)
\end{aligned}\right\} \tag{1.16}$$

ただし，(iii)においては $b_n \neq 0$，$\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ とする．

例題 1　$a>1$ ならば，$n\to\infty$ のとき $a^n/n\to\infty$ である．

▶$a=1+h$ とおくと，$h>0$ である．このとき

$$a^n=(1+h)^n=1+nh+\frac{1}{2}n(n-1)h^2+\cdots\cdots>\frac{1}{2}n(n-1)h^2$$

$$\frac{a^n}{n}>\frac{1}{2}(n-1)h^2$$

$n\to\infty$ のとき右辺は限りなく増大するので，$a^n/n\to\infty$．　□*

例題 2　$a_n\to\alpha$ ならば，$(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)/n\to\alpha$．

▶$a_n=\alpha+x_n$ とおくと，$n\to\infty$ で $x_n\to 0$．このとき

$$\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)=\alpha+\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)$$

任意の $\varepsilon>0$，ある番号 N に対して，$n>N$ ならば，$|x_n|<\varepsilon$．それ以外の $|x_1|,\cdots\cdots,|x_N|$ のうち最大を M とすると，$n>N$ のとき

$$\left|\frac{1}{n}(x_1+\cdots\cdots+x_n)\right|<\frac{1}{n}(NM+\varepsilon(n-N))<\frac{N}{n}M+\varepsilon$$

n を十分大きくして，$NM/n<\varepsilon$ とすれば

$$\left|\frac{1}{n}(x_1+\cdots\cdots+x_n)\right|<2\varepsilon$$

となる．ε は任意に選んだのだから，n が限りなく大きくなるとき左辺は 0 に収束する．　□

収束の条件として，次のコーシー(Cauchy)の定理がある．

定理(コーシーの判定法)　数列 $\{z_n\}$ が収束するための必要十分条件は，任意の正数 ε に対して，番号 N が定まり

$$p>N,\ q>N \quad \text{ならば} \quad |z_p-z_q|<\varepsilon \qquad (1.17)$$

となることである．

▶必要条件であることは明らかである．というのは z_n が α に収束する

* 本書では証明の初めと終わりを記号▶，□で表わすことにする．

ならば，十分大な p, q に対し，定義により $|z_p-\alpha|<\varepsilon/2$, $|z_q-\alpha|<\varepsilon/2$ とできるから，三角不等式によって

$$|z_p-z_q|=|(z_p-\alpha)-(z_q-\alpha)|\leqq|z_p-\alpha|+|z_q-\alpha|<\varepsilon$$

となるからである．

十分条件であることを示すために，$p>N$ とすると，与えられた条件より

$$|z_p-z_{N+1}|<\varepsilon$$

であるから，z_p は点 z_{N+1} を中心とする半径 ε の円内にある．$z_p=x_p+iy_p$ と書くと

$$x_{N+1}-\varepsilon<x_p<x_{N+1}+\varepsilon,\quad y_{N+1}-\varepsilon<y_p<y_{N+1}+\varepsilon \tag{1.18}$$

任意の n に対して，集合 $\{x_n,\ x_{n+1},\ \cdots\cdots\}$ の上限および下限* をそれぞれ U_n, L_n とすると

$$L_1\leqq L_2\leqq\cdots\cdots\leqq L_n\leqq\cdots\cdots\leqq U_n\leqq\cdots\cdots\leqq U_2\leqq U_1 \tag{1.19}$$

である．したがって，$\{L_n\}$ は有界な単調増加数列，$\{U_n\}$ は有界な単調減少数列であり，いずれも極限値をもつ(演習問題 1 の 6)．それらを L_∞, U_∞ とする．任意の n, m に対し $L_n\leqq U_m$ だから，$m\to\infty$ とすると $L_n\leqq U_\infty$．ゆえに $L_\infty\leqq U_\infty$．ところが仮定により，$p>N$, $q>N$ なるとき $|x_p-x_q|<\varepsilon$ であるから，$n>N$ に対し $U_n-L_n\leqq\varepsilon$．したがって $U_\infty-L_\infty\leqq\varepsilon$．$\varepsilon$ は任意であったから $U_\infty-L_\infty=0$．したがって x_p は極限値 $x_\infty(=U_\infty=L_\infty)$ に収束する．y_p についても同様で，極限値 y_∞ に収束する．　□

このような性質をもつ数列はコーシー列とよばれる．証明からも明らかなように，複素数列の収束は実部・虚部おのおのの 2 つの実数列の同時収束と同等である．式(1.18)は番号が N より先の点の集合は有界であることを述べている．したがって，次のボルツァノ・ワイエルシュトラス(Bolzano-Weierstrass)

---

* 実数の集合 S に属する数すべてが M より大でないとき，S は上方に有界であるといい，M を上界とよぶ．下界についても同様である．両方に有界なら単に有界という．最小の上界，最大の下界をそれぞれ上限 $\sup S$，下限 $\inf S$ という．上限，下限は必ずしも S に属する数ではない．上限 $a=\sup S$ とは次の条件を満たす数である：(1)　S に属するすべての数 x に対して $x\leqq a$, (2)　$a'<a$ とすると，$a'<x$ なる数 x があればそれは S に属する．数列の各項がその番号とともに増加（減少）するとき，単調増加（減少）数列という．

の定理により，少なくとも1つの極限点が存在する．極限点が1つであることは上の証明より明らかである．

> **定理**(ボルツァノ・ワイエルシュトラス)　実数の有界閉区間における無限点集合において，任意の無限部分集合は集積点を有する．

［例 1］ **e の定義．** いま

$$e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{1.20}$$

とすると，二項定理によって

$$e_n=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n\cdot\cdots\cdot(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}$$

$$=1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{2!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!}+\cdots\cdot$$

$$+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{n!}$$

n の代わりに $n+1$ とすればわかるように，数列 $\{e_n\}$ は単調に増大する．

$$e_n<1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\cdot+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdot$$

$$+\frac{1}{2^{n-1}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3$$

ゆえに，単調増大数列 $\{e_n\}$ は有界であり，したがって収束する（図 1.5；

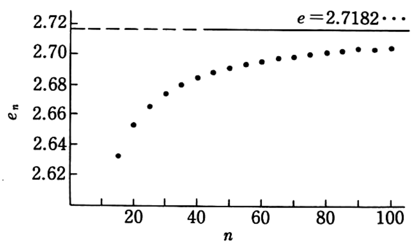


図 1.5　n に対する e_n の値

演習問題 1 の 6)．この極限値は e と定義される．□

複素数 u_n の無限級数を考えよう：

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdot \tag{1.21}$$

この級数の n の部分和を

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots\cdot + u_n$$

とする．もし数列 $\{s_n\}$ が収束するならば，級数は収束するといい，その極限値 U を級数の和という．コーシーの判定法でいうと，収束の必要十分条件は，任意の正数 ε に対し番号 N が定められて，$p>N$，任意の $m>0$ に対し

$$|s_{p+m} - s_p| = |u_{p+1} + \cdots\cdot + u_{p+m}| \leqq \sum_{k=1}^{m} |u_{p+k}| < \varepsilon \tag{1.22}$$

となることである．明らかに，収束の必要条件は

$$n\to\infty \quad \text{のとき} \quad |u_n|\to 0$$

であるが($m=1$ とすれば明らか)，決して十分条件ではない(次の例 2 および演習問題 1 の 12 参照)．

［例 2］ **調和級数**

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdot=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} \tag{1.23}$$

の一般項を u_n とすると，$n\to\infty$ のとき $u_n\to 0$ である．しかし，n 部分和を s_n とすると

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots\cdot + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} \times n = \frac{1}{2}$$

したがってコーシーの判定法が満たされないから，級数は発散である．□

級数 $s_n = \sum_{k=1}^{n} |u_k|$ が収束するとき，絶対収束(absolutely convergent)という．絶対収束のときには $s_n = \sum^{n} u_k$ も収束する．それは式(1.22)から明らかである．その逆はなりたたない．級数 $\sum u_k$ は収束するが，絶対収束でないときは条件収束という．

級数 $\sum u_k$ が絶対収束するか否かは，対応する正項級数(各項がすべて正か 0) $\sum |u_k|$ の収束性に直接に結びついている．正項級数 $a_1 + a_2 + \cdots\cdot$ ($a_n \geqq 0$) の場

合，n 部分和 s_n は単調増大だから，収束の条件は s_n が有界であることである．極限値は部分和 s_n の上限として定義される．

正項級数の極限値は和の順序に関係なく定まる．他方，条件収束級数では，項の順序を変更することにより任意の和に収束させることができるし，収束性を失わせることもできる(演習問題1の15参照)．

絶対収束級数では，項の順序を変更しても絶対収束性は変わらないし，級数の和も変わらない．

1.3　級数の収束判定法

正項級数 $\sum a_n$ のある番号 N より先の各項が，収束級数 $\sum A_n$ とある正数 k とに対して

$$a_n \leqq kA_n \qquad (n>N,\ k：正定数) \tag{1.24}$$

がなりたつなら，級数 $\sum a_n$ は収束する．他方，級数 $\sum A_n$ が発散して $a_n \geqq kA_n$ がなりたつならば級数 $\sum a_n$ は発散する．このような収束判定法によく使われる級数の1つとして

$$\text{(i)}\quad 1+q+q^2+\cdots\cdots+q^n+\cdots\cdots \tag{1.25}$$

がある．この幾何級数は $0 \leq q<1$ で収束し，$q \geqq 1$ では発散する．

正項級数

$$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n+\cdots\cdots \tag{1.26}$$

を級数(1.25)と比較してみるとき，$0<q<1$ なる定数 q に対し，ある番号より先で $a_n \leqq q^n (k=1)$，すなわち

$$\sqrt[n]{a_n} \leqq q<1 \quad (\text{コーシーの判定法}) \tag{1.27}$$

あるいは

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq q<1 \quad (\text{ダランベールの判定法}) \tag{1.28}$$

がなりたつならば，$\sum a_n$ は収束する．発散についても同様である．

よく使われるもう1つの方法は，コーシーの積分判定法である．正項級数 $\sum a_n$ の各項が，正の単調減少関数 $f(x)$ によって $a_n=f(n)$ と表わされるならば，級数 $\sum a_n$ は積分

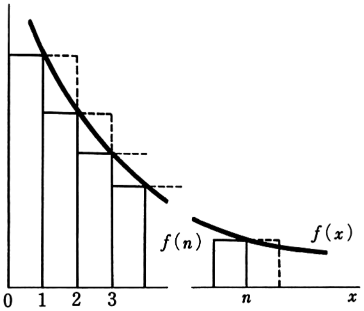


図 1.6

$$I=\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.29}$$

が有限の値をもつか，あるいは発散するかに従って，収束(実線)あるいは発散(破線)する（図 1.6，$\sum a_n$ は実線あるいは破線の棒の面積に等しい)．例えば，次の級数

$$\text{(ii)}\quad 1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots\cdots \tag{1.30}$$

を考えよう．$p\leqq 0$ ならば明らかに発散なので，$p>0$ とする．$f(x)=1/x^p$ とすれば，上の一般項は $f(n)$ で表せる．その積分は

$$I=\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\begin{cases}[\ln x]_1^{\infty} & (p=1\text{ のとき})\\ \left[\dfrac{1}{1-p}x^{1-p}\right]_1^{\infty} & (p\neq 1\text{ のとき})\end{cases} \tag{1.31}$$

である．これは，明らかに $p>1$ のとき I は収束し，$p\leqq 1$ のとき発散する．したがって，コーシーの積分判定法により，級数(1.30)は $p>1$ に対しては収束し，$p\leqq 1$ に対しては発散する．この級数も，級数(1.25)と同様に正項級数の判定法として使える．

1.4　実数の連続性について(補足)

実数の連続性を表現する種々の同値な定理がある*．その第 1 は実数の切断に関するものである．実数を 2 つの部分集合 P, Q に分けて，P に属する各数は Q に属する各数より小であるようにできたとする．P, Q は空集合でないとする．

* 参考文献；解析概論(巻末文献 1))，あるいは田島一郎：解析入門，岩波書店(1981)．

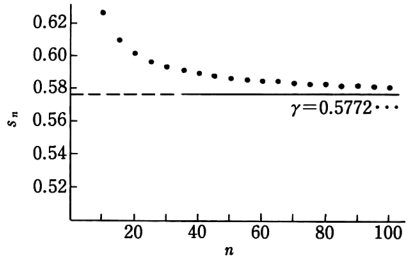


図 1.7　n に対する s_n の値

このような組分け(P, Q)をデデキント(Dedekind)の切断という．

“実数の切断は P と Q の境界として 1 つの数を確定する” —— (A)

これはデデキントの定理とよばれ，P の最大数かあるいは Q の最小数が確定される．これから次のワイエルシュトラスの定理が導かれる．

“実数の集合 S が上に(または下に)有界ならば，S の上界(下界)の集合にはならず下限(上限)が存在する” —— (B)

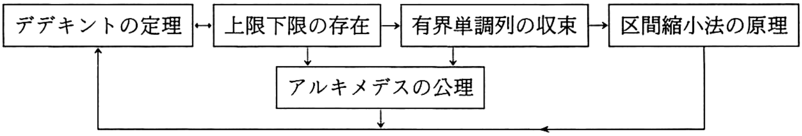
(8 頁の脚注参照)．この(B)から，有界単調数列の収束(演習問題 1 の 6)が導かれる．これを(C)とする．(C)からさらに，次の区間縮小法の原理が導かれる．

“閉区間列 $I_n=[a_n, b_n]$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ において，$I_1 \supset I_2 \supset \cdots\cdots$ および $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)$ が 0 に収束ならば，これらの各区間に共通のただ 1 つの点 α が存在する．$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha$ となる” —— (D)

一方，(B)あるいは(C)から次のアルキメデスの公理が導かれる．

“正定数 k に対し，集合 $N=\{nk|n$ は自然数$\}$ は上に有界ではない” —— (E)

また(D)と(E)から(A)を導くことができる．これを概念的な図にすると



第 1，2 章(および他章についても)は，小平邦彦：解析入門(岩波基礎数学選書)，岩波書店(1991)が参考となろう．

演習問題 1

1. z^n の極形式(1.7)および商の極形(1.10)を証明せよ．
2. 複素共役の演算 $\overline{z_1{}^n/z_2{}^m}=\bar{z}_1{}^n/\bar{z}_2{}^m$ を示せ．
3. 不等式(1.13)および(1.14)を示せ．等号はどのようなときなりたつか．
4. 自然数 n，複素定数cに対し，方程式 $z^n=c$ が n 個の異なる根を有することを示せ．$c=1$ のとき，複素 z 面上でこれらの根はどのような幾何学的位置にあるか．
5. 実数 r，θ に対し，次の和

   $$1+r\cos\theta+r^2\cos 2\theta+\cdots\cdots+r^n\cos n\theta$$

   は $(1-z^{n+1})/(1-z)$ の実部に等しいことを示せ．ただし $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ である．また和

   $$r\sin\theta+r^2\sin 2\theta+\cdots\cdots+r^n\sin n\theta$$

   はどのように与えられるか．
6. 上方に有界な単調増大数列 $\{x_n\}$，あるいは下方に有界な単調減少数列はいずれも収束することを証明せよ．
7. ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理を実数区間(0, 1)に属する無限点集合について証明せよ．
8. (i) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$$

   (ii) $$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$$

   を証明せよ．ただし $a>0$ とする．
9. 級数 $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$$

   は収束するか．
10. $$s_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$$

    は単調数列であり，$n\to\infty$ のとき有限の定数 γ に近づくことを示せ(オイラー定数 $\gamma=0.57721\ 56649\ 01532\cdots$；図1.7)．
11. 正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ に対し，正数の列 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$ があり，十分大きな番号 n に対し

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \geqq \alpha > 0 \tag{A}$$

がなりたつならば級数は収束する．ただし α は n に無関係なある正数である［クンマー(Kummer)の判定法］．$a_n = n$ とするとラーベ(Raabe)の判定法を与える．他方，式(A)の代わりに

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \leqq 0, \quad \text{かつ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \quad \text{が発散}$$

の場合には級数の収束性はどうか．

12．条件収束級数 $\sum u_n$ は，項の順序を変更することにより，任意の和 c に収束させることができ，また収束性を失わせることもできることを証明せよ(Dirichlet)．

2. 複素関数と連続性

2.1 関数と写像

1つの複素数 z に対し，1つまたは複数の複素数 w が対応するとき w は z の関数であり，$w=f(z)$ と書く．z を独立変数，w を従属変数という．

複素平面(z 平面)上の領域 D を z が動くとき，w もまた別の複素平面(w 平面)上の領域 D′ を動く(図 2.1)．ゆえに，$w=f(z)$ の関係は z 平面から w 平面への写像(mapping)となる．写像という代わりに変数 z から変数 w への変換ということもある．

任意の z の値に対して w の値が1つそしてただ1つ対応するとき，$f(z)$ は一価関数という．もし2個または多数の w が対応するなら，$f(z)$ は z の二価または多価関数という．

例えば，$w=z^5$ は1つの z に対して1つの w が対応するので，一価関数である．$w=z^{1/2}$ は二価関数である．というのは，$z=re^{i\theta}$ とするとき

$$w_1=z^{1/2}=r^{\frac{1}{2}}e^{i(\theta/2)}=\sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right) \tag{2.1}$$

を2乗すると，${w_1}^2=re^{i\theta}$ は z を与える．ところが

$$w_2=r^{\frac{1}{2}}e^{i(\theta/2+\pi)}=-w_1 \tag{2.2}$$

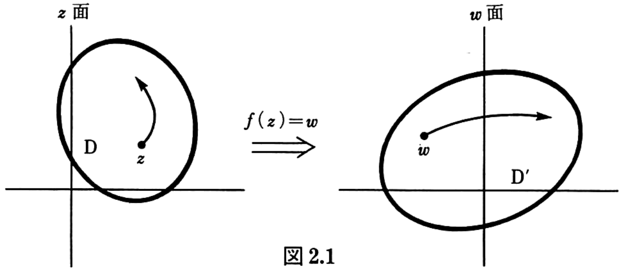


図 2.1

の 2 乗も，$w_2{}^2=re^{i(\theta+2\pi)}=re^{i\theta}$ となって同じ z を与える(式(2.29)参照)．したがって，1 つの z に対して w_1, w_2 という 2 つの w が対応することになる．しかし，偏角を $0\leqq\theta<2\pi$ に制限するなら，その領域内の $z=re^{i\theta}(0\leqq r<\infty)$ に対し，$z^{1/2}=w_1$ は一価関数である．同様に $z^{1/3}$ は三価の関数であるが，偏角を上のように制限すれば，やはり一価となる．

関数はこのようにその定義領域を有する．他方，例えば単位円 $|z|=1$ の内部を定義領域とする関数もある(式(2.11))．

逆関数　関数関係 $w=f(z)$ において，w を独立変数，z を従属変数とみなすこともできる．このとき，$z=g(w)=f^{-1}(w)$ と書き，f^{-1} を f の逆関数という．

複素変数 z に対する複素数値の関数 $f(z)$ を複素関数とよび，実変数 x の実数値関数 $f(x)$ を実関数とよぶ．

2.2　関数の極限と連続性

関数 $f(z)$ が点 $z=z_0$ の近傍で定義され，かつ一価であるとする．点 z が定点 z_0 に限りなく近づくとき，関数 $f(z)$ も限りなく一定値 f_0 に近づくならば，f_0 を $f(z)$ の極限値といい

$$z\to z_0 \quad \text{のとき} \quad f(z)\to f_0$$

と書く．詳しくいうと，正数 ε を任意に与えて，ε と z_0 に依存する適当な正数 $\delta=\delta(\varepsilon, z_0)$ を定めたとき

$$|z-z_0|<\delta(\varepsilon, z_0) \quad \text{なるすべての } z \text{ に対し} \quad |f(z)-f_0|<\varepsilon$$

がなりたつような定数 f_0 が存在するなら，$f(z)$ は z_0 において極限値 $f_0=\lim_{n\to\infty} f(z)$をもつという(このとき $z=z_0$ で $f(z)$ が定義されていなくてもよい)．極限値 f_0 は点 z_0 への z の接近のしかたにはよらないものとする．

点 z_0 における関数値 $f(z_0)$ が存在し，それが極限値 f_0 に等しいとき，すなわち

$$f(z_0)=\lim_{z\to z_0} f(z)$$

ならば，$f(z)$ は z_0 で連続であるという．上の $\varepsilon-\delta$ 論法でいうと，任意の正数 ε が与えられたとき，正数 δ を適当にとり

$$|z-z_0|<\delta \quad \text{なら，} \quad |f(z)-f(z_0)|<\varepsilon \tag{2.3}$$

であるとき，$f(z)$ は点 z_0 で連続であるという．

極限に関して，次の性質がある．すなわち

$z \to a$ のとき，$f(z) \to A$，$g(z) \to B$ ならば

$$\left.\begin{aligned} &f(z) \pm g(z) \to A \pm B, \quad f(z)g(z) \to AB, \\ &f(z)/g(z) \to A/B \quad (\text{ただし } g(z) \neq 0,\ B \neq 0) \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

z 面の領域 D の各点で連続な関数を，D での連続関数という．2 つの連続関数の和，差，積，商はやはり連続関数である．ただし，商に関しては分母の関数が 0 となる点を除く必要がある．

2.3　一様収束

ある領域 D に属する各点 z において，関数の列

$$f_1(z),\ f_2(z),\cdots\cdots,\ f_n(z),\cdots\cdots \qquad (z \in D)$$

が収束するときには，当然その極限値は点 z の関数であり，その極限関数を $f(z)$ と書こう．この場合，$\varepsilon > 0$ を任意にとるとき，それに応じて自然数 N が存在して，$n > N$ なるとき $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$ となる．しかしこのとき N の値は z によって異なるであろう．ところがもし，N が z には無関係で ε にのみ関係するならば，すなわち

$$\text{すべての } n > N,\ \text{すべての } z \in D \text{ に対し} \quad |f(z) - f_n(z)| < \varepsilon \tag{2.5}$$

ならば，関数列 $\{f_n(z)\}$ は領域 D において**一様に収束**する (uniformly convergent) という．

［例 1］　実変数 x の関数列 $f_n(x) = x^n$ を区間 $[0,\ 1]$ で考えよう (図 2.2)．この関数列は $n \to \infty$ のとき

$$f(x) = 0\ (0 \leqq x < 1), \qquad 1\ (x = 1)$$

に収束するが，これは一様収束ではない．というのは，与えられた $x\,(<1)$

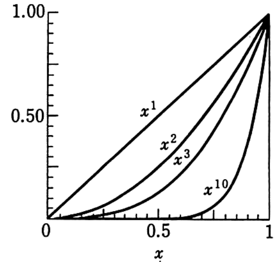


図 2.2

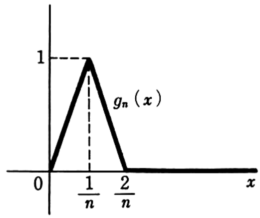


図 2.3

に対して $|x^n-0|<\varepsilon(<1)$ のためには，$n>\ln\varepsilon/\ln x$ とする必要がある $(\ln x<0)$．x が下から 1 に近づくにつれ $\ln x\to -0$ となり（負側から 0 に近づく），N を x に無関係に選ぶことができないからである．□

［例 2］ 図 2.3 のような関数 $g_n(x)$ を $x\geqq 0$ で考えてみる．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g_n(x)\Big|_{x=0}=n$$

であるが，$g_n(1/n)=1$ で，$x\geqq 2/n$ では $g_n(x)=0$ なので，x の値を固定して $n\to\infty$ とすると，$g_n(x)$ は 0 に収束する．すなわち，$g_n(x)\to g(x)\equiv 0$ $(x\neq 0)$ である．しかし

$$g_n\left(\frac{1}{n}\right)-g\left(\frac{1}{n}\right)=1$$

が常になりたつので，正数 ε をとったとき $|g_n(x)-g(x)|<\varepsilon$ をすべての x でなりたたせることはできないから，一様収束ではない．原点で導関数が発散している．□

一様収束する関数の無限級数はいくつかの好都合な性質を有する．その 1 つが次の定理である．微分・積分についても重要な性質があるが，それは複素関数の微分積分を定義してから述べることにする．

定理　複素 z 面のある領域 D において，関数 $u_n(z)$ が連続で，$s_n(z)=\sum_{k=1}^{n}u_k(z)$ が一様収束するならば，その極限関数 $s(z)$ は連続である．

▶ $s(z)=s_n(z)+R_n(z)$ とすると，十分大なる n に対し，一様に $|R_n(z)|<\varepsilon$ がなりたつ．$z+h$ と z が D に属するとき

$$s(z+h)-s(z)=s_n(z+h)-s_n(z)+R_n(z+h)-R_n(z)$$

$s_n(z)$ は n 個の連続関数の和だから連続である．そこで $|h|$ を十分小さくとれば，$|s_n(z+h)-s_n(z)|<\varepsilon$．一様収束の仮定から，$z$，$h$ に関係なく，$|R_n(z)|<\varepsilon$，$|R_n(z+h)|<\varepsilon$．ゆえに上式より

$$|s(z+h)-s(z)|<3\varepsilon$$

これは $s(z)$ が D で連続であることを示している．□

この定理で，部分和 $s_n(z)$ を関数列 $\{f_n(z)\}$ と書き換えると，次の系を得る．

系　領域 D において，$f_n(z)$ が連続で，一様に $f(z)$ に収束するならば，$f(z)$ は連続である．

2.4　ベキ級数

複素数の数列 $\{c_n\}$ に対し

$$P(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots\cdot \tag{2.6}$$

の形の級数を**ベキ級数**(power series)，あるいは整級数という．ベキ級数 $P(z)$ は，ある点 z_0 で収束するか，しないかのいずれかである．もし点 z_0 で収束したとすると $|c_nz_0{}^n|$ は有界であり，すべての n に対して，ある定数 B によって $|c_nz_0{}^n|<B$ とおさえられるので

$$|c_nz^n|=|c_nz_0{}^n|\left|\frac{z}{z_0}\right|^n<B\left|\frac{z}{z_0}\right|^n \tag{2.7}$$

したがって，$|z|<|z_0|$ を満たすすべての z に対し級数(2.6)は絶対収束する．このことは式(1.24)，(1.25)から明らかである．次にもし，ある点 z_1 で式(2.6)が発散したとすると，$|z|>|z_1|$ を満足するすべての z で収束することはありえない．というのは，収束するとしたら，上で証明したことと矛盾するからである(アーベルの定理)．

このようにして，ベキ級数 $P(z)$ には一般に次の性質をもつ実数 R が存在することが示された．すなわち，$0\leqq R\leqq\infty$ の中の数 R に対し，$P(z)$ は

$$|z|<R\text{ならば絶対収束し，}|z|>R\text{ ならば発散する．} \tag{2.8}$$

また，$|z|<R$ に含まれる任意の閉領域 $|z|\leqq R_1(<R)$ において収束は一様である．このような R をベキ級数 P の**収束半径**といい，円 $|z|=R$ を P の**収束円**とよぶ．

もし $|c_n/c_{n+1}|$ の極限値が存在するなら，収束半径 R はその値で与えられ

る：

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \tag{2.9}$$

というのは，そのときには $|c_{n+1}z^{n+1}|/|c_nz^n|=|c_{n+1}/c_n|\,|z|\to|z|/R(n\to\infty)$ となるからダランベールの判定法(1.28)が使えるからである．ここで，式(2.9)の右辺が 0 なら $R=0$，右辺が ∞ なら $R=\infty$ と定めることにする．またもし

$$\sqrt[n]{|c_n|}\text{ の上極限}=\lim_{n\to\infty}[\sup\{|c_n|^{1/n},\ |c_{n+1}|^{1/(n+1)},\cdots\}]$$

$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}\quad\left(=\frac{1}{R}\right) \tag{2.10}$$

が存在するなら R はその逆数で与えられる．そのときには $|c_nz^n|^{1/n}\to|z|/R(n\to\infty)$ となり，コーシーの判定法(1.27)が使えるからである．

ベキ級数はその収束円の内部 D_1，すなわち $|z|\leqq R_1(<R)$ で一様絶対収束する．前節の定理により，ベキ級数 $P(z)$ は収束円内の任意の閉円 D_1 で z の連続関数を表す．第 3 章で示すように，この関数は何回でも項別に微分・積分ができ，その結果生ずるベキ級数はすべて元の級数と同じ収束半径を有する．このような性質のために，ベキ級数は複素関数論で重要な役割をする．ベキ級数のいくつかの例を示そう．

［例 3］ 次の幾何級数

$$1-z+z^2-\cdots+(-1)^nz^n+\cdots\quad\left(=\frac{1}{1+z}\right) \tag{2.11}$$

の収束半径は $R=1$ であることはすぐに示せる．収束円は単位円 $|z|=1$ でこのベキ級数は連続関数 $1/(1+z)$ を表わすが，これに関しては後の章で詳しく学ぶ(第 5 章例題 1，第 8 章)．

［例 4］ 次のベキ級数

$$z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+\cdots\quad(=\ln(1+z)) \tag{2.12}$$

の収束半径も

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$$

で，収束円 $|z|=1$ の内部で連続関数 $\ln(1+z)$ を表わす(第 5 章の例題 1 を

見よ)．z を実変数のように考えて式(2.12)の両辺を z で微分すると，それぞれ式(2.11)の両辺の表式が得られ，やはり等式がなりたっており，収束半径も同じである．

［例 5］ ガウス(Gauss)の**超幾何級数**は任意の複素定数 α，β，γ に対し

$$F(\alpha,\beta,\gamma\,;z)=1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}z+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}z^2+\cdots\cdot+\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}z^n+\cdots\cdot \tag{2.13}$$

によって定義される．ただし，$(\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)\cdots\cdot(\alpha+n-1)$，$n!=1\cdot2\cdot\cdots\cdot n=(1)_n$ 等であり，γ が 0 または負整数の場合は除くものとする．収束半径は，$n\to\infty$ のとき

$$\frac{(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{n(\gamma+n-1)}\to1$$

であるから，やはり $R=1$ である．

α，β，γ に特別の値を与えると，よく知られた関数が得られる．例えば，$\alpha=\beta=\gamma=1$ とすると式(2.11)のベキ級数と類似の級数が得られる．さらに

$$F(1,1,2\,;z)=1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3}+\cdots\cdot+\frac{z^n}{n+1}+\cdots\cdot=-\frac{1}{z}\ln(1-z) \tag{2.14}$$

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\,;z\right)=1+\frac{1}{2}z+\frac{1\cdot3}{2^2 2!}z^2+\cdots\cdot+\frac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^n n!}z^n+\cdots\cdot=\frac{1}{\sqrt{1-z}} \tag{2.15}$$

収束円上では，級数は収束することもあるし，しないこともある．上に述べた収束半径 R の考察から，z/R を新しく変数 z とすれば，新しい変数については収束半径は 1 となる．その級数 $\sum c_n z^n$ において

$$\frac{c_n}{c_{n+1}}=1+\frac{a}{n}+\frac{A(n)}{n^\lambda} \tag{2.16}$$

とする．ここで a は複素定数，λ は実定数で $\lambda>1$，$A(n)$ は有界な n の関数で

ある．収束円 $|z|=1$ 上の点に対し，級数は

（i） もし $\mathrm{Re}\, a>1$ ならば，絶対収束

（ii） もし $\mathrm{Re}\, a\leqq 0$ ならば，発散 (2.17)

（iii） もし $0<\mathrm{Re}\, a\leqq 1$ ならば，$z=1$ を除いて収束，$z=1$ で発散

である(演習問題 2 の 10)．一例として，級数 $\sum z^n/(n+1)$ は $(a=1,\ \lambda=2,\ A=-1)$，点 $z=1$ を除いて，単位円上で収束する(式(2.14)を見よ)．

2.5 ベキ級数の一意性，その他の性質

A. ベキ級数の一意性

原点に集積する無限点列の上で，2 つの級数 $\sum a_n z^n$，$\sum b_n z^n$ が同じ値をもつとする．そのときすべての n に対し $a_n=b_n$ がなりたつ．これは次のように示される．第 1 の級数を

$$a_0+z(a_1+a_2 z+a_3 z^2+\cdots\cdots)$$

と書こう．第 2 の級数も同様に書ける．括弧内の級数はもとの級数と同じ収束性をもっている．収束円内において，原点を中心とする円の内部で括弧内の関数は連続かつ有界であるから，2 つの級数は a_0+zA，b_0+zB という形に表わせる．ここで A，B は有界である．両級数が一致する点列上で，z が原点に近づくにつれて第 2 項 zA，zB は無視できるようになる．それゆえ，$a_0=b_0$ でなければならない．そのとき，点列上で

$$a_1 z+a_2 z^2+\cdots\cdots=b_1 z+b_2 z^2+\cdots\cdots$$

がなりたつ．両辺を z で割って，上の考察をくり返せば $a_1=b_1$ が示される．同様にして，どの n に対しても $a_n=b_n$ となる．

B. 項の再配列

さて，項の再配列について考えてみよう．次の級数

$$f(w)=b_0+b_1 w+b_2 w^2+\cdots\cdots$$

の収束円径が R とする．その複素変数 w はさらに

$$w(z)=c_0+c_1 z+c_2 z^2+\cdots\cdots$$

と表わせるものとする．次の級数を考えてみよう：

$$b_0+b_1(c_0+c_1 z+c_2 z^2+\cdots\cdots)+b_2(c_0+c_1 z+c_2 z^2+\cdots\cdots)^2+\cdots\cdots \tag{2.18}$$

変数 z の値は $w(z)$ が収束し，さらに $f(w)$ が収束する範囲，すなわち $|w|<R$ にあるものとする．そのとき，式(2.18)は明らかに $f[w(z)]$ に収束することになろう．このとき次の性質がある．もし，z が次の絶対値級数

$$|c_0|+|c_1||z|+|c_2||z|^2+\cdots\cdots$$

を R より小さい値に収束させるような値であったとするなら，式(2.18)の各項は再配列することができる（例えば，z の同じベキの項をまとめることができる）．というのは，式(2.18)の各項をその絶対値でおき換えて得られる級数は収束する．したがって，§1.2の最後に述べた性質より，もとの級数(2.18)は項の再配列によってもその値は変わらない．

C.　ベキ級数の反転

次に，ベキ級数 $P(z)$ の反転の級数を計算する問題を考えよう：

$$\frac{1}{P(z)}\equiv\frac{1}{c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots\cdots}=\frac{1}{c_0}\frac{1}{1+p(z)}$$

ただし，$c_0\neq 0$ とし，

$$p(z)=z\left(\frac{c_1}{c_0}+\frac{c_2}{c_0}z+\frac{c_3}{c_0}z^2+\cdots\cdots\right)$$

関数 $p(z)$ は z が 0 に近づけば，0 に近づく．$p(z)$ の絶対値が十分小さいときには，式(2.11)より

$$\frac{1}{1+p}=1-p+p^2-p^3+\cdots\cdots$$

したがって，z が小さいならば

$$\frac{1}{P(z)}=\frac{1}{c_0}\left[1-\left(\frac{c_1}{c_0}z+\frac{c_2}{c_0}z^2+\cdots\cdots\right)+\left(\frac{c_1}{c_0}z+\frac{c_2}{c_0}z^2+\cdots\cdots\right)^2-\cdots\cdots\right] \tag{2.19}$$

と書ける．前項Bによって，この級数は任意に並べかえることができよう．このようにして，定数項がゼロでないベキ級数の反転はまたベキ級数となることがわかる．実際，この反転級数の係数を b_n と書くと

$$(c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots\cdots)(b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots\cdots)=1$$

がなりたつ．左辺の展開式の第1項を除くすべての z^n の係数を 0 とおけば b_n が求められるが，ふつう計算はかなり面倒である．よく使われて，表にもなっ

ている 2 つの場合を示しておこう．すなわち

$$\left(1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^3}{4!}+\cdots\cdot\right)^{-1}=\frac{B_0}{0!}+\frac{B_1}{1!}z+\frac{B_2}{2!}z^2+\cdots\cdot \tag{2.20}$$

$$\left(1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}+\cdots\cdot\right)^{-1}=\frac{E_0}{0!}+\frac{E_1}{2!}z^2+\frac{E_2}{4!}z^4+\cdots\cdot \tag{2.21}$$

(ただし，$0!=1$)．係数 B_n，E_n はそれぞれベルヌーイ数，オイラー数といわれる．最初の 10 項まで示すと

$$B_0=1,\ B_1=-\frac{1}{2},\ B_2=\frac{1}{6},\ B_4=-\frac{1}{30},\ B_6=\frac{1}{42},\ B_8=-\frac{1}{30},\ B_{10}=\frac{5}{66} \tag{2.22}$$

$$E_0=1,\ E_1=-1,\ E_2=5,\ E_3=-61,\ E_4=1385,\ E_5=-50521$$

(0 となる係数は省略した)．直接，計算によってこれらを確かめることができよう．次の再帰公式がなりたつ：

$$(B+1)^n-B^n=0,\ (E+1)^{2n}+(E-1)^{2n}=0$$

ただし，2 項展開してから B^n を B_n で，E^{2n} を E_n でおき換えるものとする．以下で，式(2.20)，(2.21)は $z/(e^z-1)$，$\operatorname{sech} z$ の展開であり，それぞれ $|z|<2\pi$，$|z|<\pi/2$ で収束することがわかるであろう．

2.6 初等関数

関数論でひんぱんに扱われる初等関数について整理しておこう．

i) **多項式**は

$$P_n(z)=c_0+c_1z+\cdots\cdot+c_nz^n \tag{2.23}$$

で定義される．ただし $c_n\neq 0$，n は 0 または自然数，$c_0, \cdots\cdot, c_n$ は複素定数である．数 n は多項式の次数といわれる．多項式は有理整関数ともいわれる．

ii) **有理関数**　$P(z)$，$Q(z)$ が 2 つの多項式のとき

$$R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$$

を有理関数，あるいは有理代数関数という．特に，複素定数 a，b，c，d に

対し

$$w=\frac{az+b}{cz+d}\quad (ad-bc\neq 0) \tag{2.24}$$

を1次分数関数，あるいは単に1次関数ともいう．1次関数による写像(変換)：$z\to w$ を1次写像(変換)という．

iii) **指数関数**　e^z は次の級数で定義される($0!=1$ とする)：

$$\mathrm{e}^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots\cdot \tag{2.25}$$

係数 $c_n=1/n!$ に対し，$n\to\infty$ のとき $c_n/c_{n+1}=n+1\to\infty$ となる．したがって，収束半径は ∞ で，任意の複素数 z に対し右辺の級数は収束し，連続関数 e^z を表わす．この指数関数に関し，加法定理

$$\mathrm{e}^{z_1+z_2}=\mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2} \tag{2.26}$$

がなりたつ．実際

$$\mathrm{e}^{z_1}\cdot\mathrm{e}^{z_2}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{{z_1}^p}{p!}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{{z_2}^q}{q!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{{z_1}^p{z_2}^q}{p!q!}$$

において $p+q=n$ となる項だけをまとめると

$$\sum_{p=0}^{n}\frac{{z_1}^p{z_2}^{n-p}}{p!(n-p)!}=\frac{1}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{p}{z_1}^p{z_2}^{n-p}=\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}$$

となる．ゆえに

$$\mathrm{e}^{z_1}\cdot\mathrm{e}^{z_2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}=\mathrm{e}^{z_1+z_2}$$

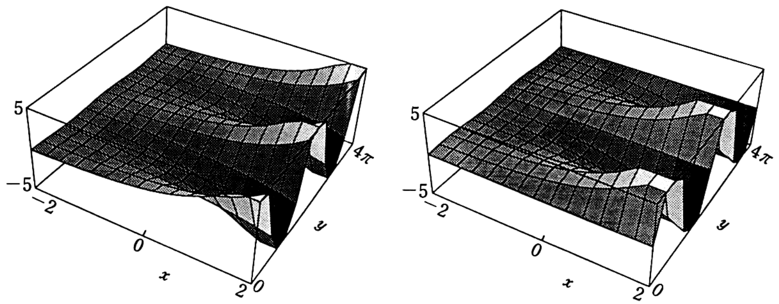
を得る．上の各無限級数は絶対収束なので，和の順序の交換が許される．特に $z=x+iy$ に対して，$z_1=x$，$z_2=iy$ とすると $\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{iy}$ と書くことができる．定義(2.25)を使うと

$$\mathrm{e}^{iy}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iy)^n}{n!}=1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}+\cdots\cdot+i\left(y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\cdots\cdot\right)$$

ここで実数 y に対してよく知られている級数展開

$$\cos y=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}y^{2n},\quad \sin y=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{2.27}$$

を用いると，次のオイラーの公式



(a) $\mathrm{Re}\,e^z = e^x \cos y$　　(b) $\mathrm{Im}\,e^z = e^x \sin y$

図 2.4

$$\therefore \quad e^{iy} = \cos y + i \sin y \tag{2.28}$$

を得る．特に

$$e^0 = 1,\ e^{i\pi/2} = i,\ e^{i\pi} = -1,\ e^{i3\pi/2} = -i,\ e^{i2\pi} = 1 \tag{2.29}$$

このようにして次の公式が導かれる(図 2.4)：

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \tag{2.30}$$

指数関数 e^z は周期 $2\pi i$ の周期関数である：$e^{z+2\pi i} = e^z$.

iv) **三角関数**　実変数の場合と同じ形のベキ級数によって複素変数の三角関数が定義される：

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \cdots \tag{2.31}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \tag{2.32}$$

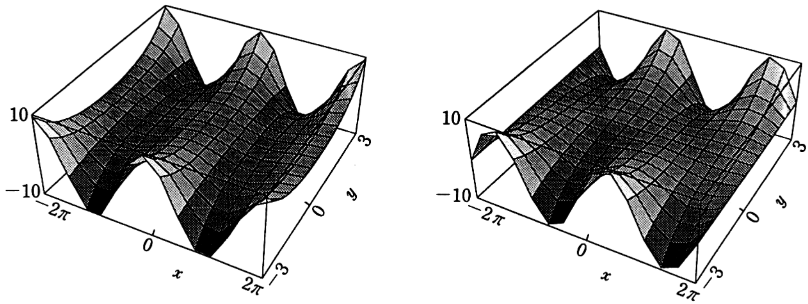
これらは指数関数 e^z を用いて

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \qquad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \tag{2.33}$$

(図 2.5) とも表わされる．実三角関数に対してなりたつ関係はまた複素三角関数に対してもなりたつ．例えば

$$\tan z \equiv \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1,\ 1 + \tan^2 z = \sec^2 z,\ 1 + \cot^2 z = \csc^2 z$$



(a) Re $\cos z=\cos x\ \cosh y$　　(b) Im $\cos z=-\sin x\ \sinh y$

図 2.5

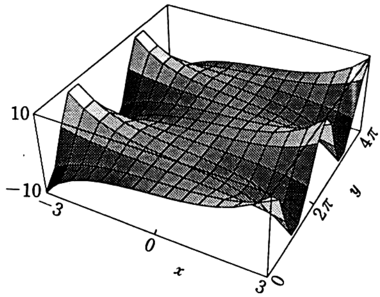
$$\left.\begin{aligned}&\sin(-z)=-\sin z,\ \ \cos(-z)=\cos z,\ \ \tan(-z)=-\tan z\\&\sin(z_1\pm z_2)=\sin z_1\cos z_2\pm\cos z_1\sin z_2\\&\cos(z_1\pm z_2)=\cos z_1\cos z_2\mp\sin z_1\sin z_2\\&\tan(z_1\pm z_2)=\frac{\tan z_1\pm\tan z_2}{1\mp\tan z_1\tan z_2}\end{aligned}\right\}\tag{2.34}$$

v) **双曲線関数**　この関数群は

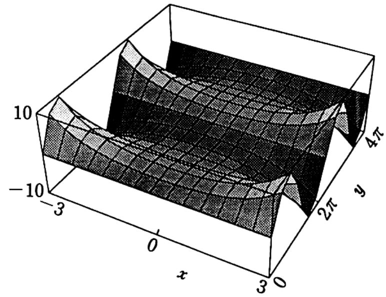
$$\left.\begin{aligned}&\sinh z=\frac{e^z-e^{-z}}{2},&&\cosh z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}\\&\mathrm{sech}\,z=\frac{2}{e^z+e^{-z}},&&\mathrm{csch}\,z=\frac{2}{e^z-e^{-z}}\\&\tanh z=\frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}},&&\coth z=\frac{e^z+e^{-z}}{e^z-e^{-z}}\end{aligned}\right\}\tag{2.35}$$

で定義される(図 2.6). 実双曲線関数の場合と同じように, 次の関係がなりたつ：

$$\left.\begin{aligned}&\cosh^2 z-\sinh^2 z=1,\ \ 1-\tanh^2 z=\mathrm{sech}^2 z,\ \ \coth^2 z-1=\mathrm{csch}^2 z\\&\sinh(-z)=-\sinh z,\ \ \cosh(-z)=\cosh z,\ \ \tanh(-z)=-\tanh z\\&\sinh(z_1\pm z_2)=\sinh z_1\cosh z_2\pm\cosh z_1\sinh z_2\\&\cosh(z_1\pm z_2)=\cosh z_1\cosh z_2\pm\sinh z_1\sinh z_2\\&\tanh(z_1\pm z_2)=\frac{\tanh z_1\pm\tanh z_2}{1\pm\tanh z_1\tanh z_2}\end{aligned}\right\}\tag{2.36}$$



(a) Re sinh z = sinh x cos y



(b) Im sinh z = cosh x sin y

図 2.6

三角関数と双曲線関数の間には

$$\left.\begin{array}{lll}\sin iz = i\sinh z, & \cos iz = \cosh z, & \tan iz = i\tanh z \\ \sinh iz = i\sin z, & \cosh iz = \cos z, & \tanh iz = i\tan z\end{array}\right\} \quad (2.37)$$

の関係がある．

vi) **対数関数**　複素変数 z と w の間に $z=\mathrm{e}^w$ の関係があるとき，その逆の関係を $w=\ln z$ と書き，z の自然対数とよぶ．z と w が実数のときは，これは従来の関係と一致する．複素数では，z を極形式 $r\mathrm{e}^{i\theta}$ で表わし，$\ln z=u+iv$ とすると

$$z=\mathrm{e}^{u+iv}=r\mathrm{e}^{i\theta}$$

であるから

$$\mathrm{e}^u=r,\quad v=\theta+2\pi n \quad (n=0, \pm1, \pm2, \cdots\cdot)$$

$\mathrm{e}^u=r$ は実数の関係であるから，$u=\ln r$ と表わせるが，n は任意の整数でよいので，v は一意に定まらない．したがって，$\ln z$ の虚部は $2\pi i$ の整数倍の不定性があり，多価関数である：

$$w=\ln z=\ln r+i(\theta+2\pi n) \quad (2.38)$$

1つの z の値に，無限に多くの $\ln z$ の値が対応している．そのうち，特に

$$\ln z=\ln r+i\theta \quad (0\leqq\theta<2\pi) \quad (2.39)$$

で表わせる部分を $\ln z$ の主分枝，あるいは $\ln z$ の主値とよぶことがある．主値をとると

$$\ln 1=0,\ \ln(-1)=i\pi,\ \ln i=i\frac{\pi}{2},\ \ln(-i)=i\frac{3}{2}\pi \qquad (2.40)$$

と表わせる．主分枝の定義としては，$-\pi\leqq\theta<\pi$ など，他の 2π の区間をとることもある．

vii) **逆三角関数**　関係式 $z=\sin w$ の逆の関係を $w=\sin^{-1}z$ と書いて逆 sin 関数という．同じように $\cos^{-1}z$，$\tan^{-1}z$ 等を定義することができる．関数 $z=\sin w$ の定義によると

$$z=\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}$$

であるから，それを変形して e^{iw} についての2次式

$$(e^{iw})^2-2iz e^{iw}-1=0$$

の形にして，e^{iw} について解くと

$$e^{iw}=iz\pm\sqrt{1-z^2}$$

となる．両辺の対数をとって

$$w=\frac{1}{i}\ln(iz+\sqrt{1-z^2})$$

が求まる．ここで $\sqrt{1-z^2}$ は ± 両方の符号をとるものとし，$2\pi n$ の不定性も対数関数の表現の中に含まれているものとする．このようにして

$$\sin^{-1}z=\frac{1}{i}\ln(iz+\sqrt{1-z^2}) \qquad (2.41)$$

を得る．これは多価関数である．同様に他の逆三角関数について次の式を得る：

$$\left.\begin{aligned}
&\cos^{-1}z=\frac{1}{i}\ln(z+\sqrt{z^2-1}),\\
&\sec^{-1}z=\frac{1}{i}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right),\quad \csc^{-1}z=\frac{1}{i}\ln\left(\frac{i+\sqrt{z^2-1}}{z}\right)\\
&\tan^{-1}z=\frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right),\qquad \cot^{-1}z=\frac{1}{2i}\ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (2.42)$$

viii）**逆双曲線関数**　双曲線関数の逆関数は

$$\left.\begin{aligned}&\sinh^{-1}z=\ln(z+\sqrt{z^2+1}),\ \cosh^{-1}z=\ln(z+\sqrt{z^2-1})\\&\mathrm{sech}^{-1}z=\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right),\ \mathrm{csch}^{-1}z=\ln\left(\frac{1+\sqrt{z^2+1}}{z}\right)\\&\tanh^{-1}z=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right),\ \coth^{-1}z=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\end{aligned}\right\}\quad(2.43)$$

で定義される．この場合も，対数関数の多価性は ln の中に含まれている．

ix）**代数関数**　$P_0(z)\neq 0$，$P_1(z)$，‥‥，$P_n(z)$ を z の多項式とする（n は正整数または 0）．このとき方程式

$$P_0(z)w^n+P_1(z)w^{n-1}+\cdots\cdots+P_{n-1}(z)w+P_n(z)=0 \qquad (2.44)$$

の解，$w=f(z)$ を z の**代数関数**という．例えば，$n=2$ で

$$P_0=1,\ P_1(z)=0,\ P_2(z)=-z$$

とすると，$w^2-z=0$ である．この式の解として得られる $w=z^{1/2}$ は§2.1で考察したが，これは代数関数の 1 つである．

式(2.44)で表わせない関数は超越関数という．対数関数，三角関数，双曲線関数やそれぞれの逆関数は超越関数である．

上述の i）〜ix)の関数およびそれらの関数から，有限回の加減乗除ならびに根に開く演算によって導かれる関数を**初等関数**と総称する．

2.7　分岐点とリーマン面

最初の節で関数 $z^{1/2}$ を考察し，同じ 1 つの $z=re^{i\theta}$ に対し $z^{1/2}=r^{1/2}e^{i\theta/2}$ が 2 つの値 w_1，w_2 をもつことをみた．これは $(1/2)\theta$ の区間 $[0,\ 2\pi]$ に対し，θ の区間 $[0,\ 4\pi]$ が対応することによる．一般に，偏角 $\theta+2\pi n$ の z は $re^{i\theta}$ と同じ z を与えるが，$z^{1/2}$ は w_1 と w_2 が対応する：偶数の n は w_1，奇数の n は w_2 となる．

式(2.1)，(2.2)で与えられる関数 w_1，w_2 は $w=z^{1/2}$ の枝(branch)あるいは分枝とよばれる．すなわち，$0\leqq\theta<2\pi$ を 1 つの分枝にとれば，$2\pi\leqq\theta<4\pi$ はもう 1 つの分枝に対応する．ある点 z_0 のまわりを z が一周したとき，$w=f(z)$ がもとの値にもどらないとき，その点 z_0 を分岐点（branch point）という．上の例でいえば，関数 $z^{1/2}$ に対しては，原点が分岐点である．原点のまわりを z

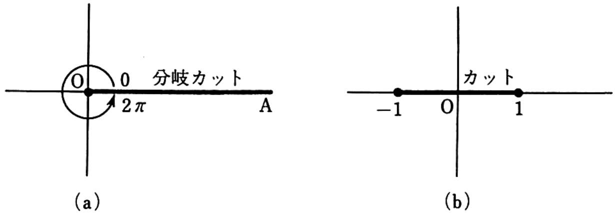
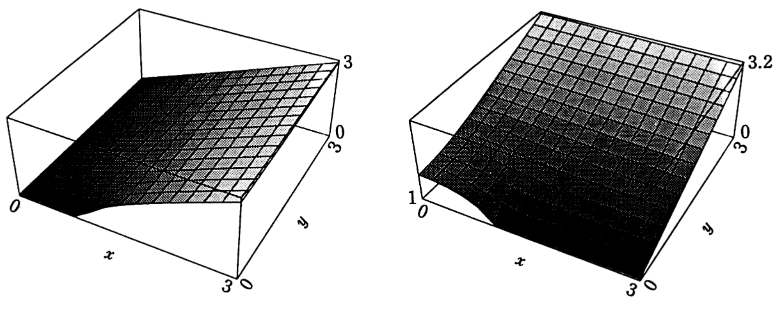


図 2.7

が一周してもとにもどると θ は 2π だけ増加(あるいは減少)する．このとき関数 w_1 は w_2 になるし，また関数 w_2 は w_1 になる．原点以外の点では(無限遠点を除けば)このような性質はない．

$z^{1/2}$ のような多価関数は，z 面に変更を加えることによって一価関数として扱う方法がある．原点のまわりを一周するときに，例えば正の実軸上に切り(カット)を入れて，このカットを通るときに別の分枝に移ると約束する．このとき $z=re^{i\theta}$ の偏角として主分枝 $0\leqq\theta<2\pi$ をとるとき，関数 $z^{1/2}$ は一意的に w_1 で与えられる(図 2.7(a))．このような分岐カットは，原点から無限遠にのびるどのような直線(曲線)でもよい．関数によっては 2 点を結ぶ線分が選ばれることもある．例えば，関数 $w=(z^2-1)^{1/2}$ では，$z=1$ と -1 を結ぶ直線上にカットを入れることで一意性が与えられる(図 2.7(b)；図 2.8)．

次に，分岐カットを通過するときのルールを考えよう．$z^{1/2}$ の 1 つの分枝(例えば w_1 の分枝)から出発して，カット OA を通過したときには，他の分枝



(a) Re $\sqrt{z^2-1}$　　(b) Im $\sqrt{z^2-1}$

図 2.8　複素面 $(0\leqq x,\ y\leqq 3)$ 上の関数 $(z^2-1)^{1/2}$．ただし $0\leqq\arg(z-1)\leqq\pi$

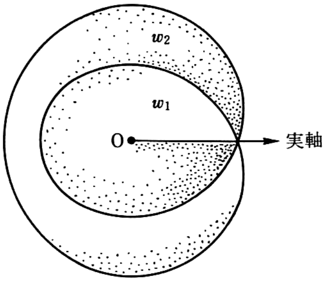


図 **2.9**　2葉のリーマン面

(w_2)に移行すると約束する．このとき z 面は2重の面からなっていると考えるのが便利である(図2.9)．第2面で原点を一周すれば再び第1面にもどることにし，関数も w_2 から w_1 にもどることにする．このように複素面を2葉にすれば，それぞれの面で関数を一意的に与えることができる．このような多葉の面をリーマン面(Riemann surface)という．同じようにして，関数 $z^{1/3}$ のリーマン面は3葉の複素面からなる．また対数関数 $\ln z$ では無限多葉のリーマン面によってはじめて関数は一意的に表される．

演習問題 2

1. pが任意の実数をとるとき

$$\lim_{p\to+\infty}\left(1+\frac{1}{p}\right)^p=e,\quad \text{ただし}\quad e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

を示せ([例 1] 参照).

2. $$\lim_{p\to\infty}\left(1+\frac{x}{p}\right)^p=\mathrm{e}^x$$

を示せ．ただし x は実数とする.

3. 数 e を対数の底とするとき，これを自然対数といい，$y=\mathrm{e}^x$ を $x=\ln y$ と表わす．このとき次の関係(i)～(v)を示せ：

(i) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{\ln(1+h)}{h}=\ln e\ (=1)$

(ii) $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x=\lim_{h\to0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\frac{1}{x}$

(iii) $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x$

(iv) $\displaystyle\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdot$

(v) $\displaystyle e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdot=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$

(数 e を小数 15 桁まで示すと，$e=2.71828\ 18284\ 59045\cdots\cdots$.)

4. $$\cos z\cosh z=1$$

を満足するすべての複素数 z の値を示せ.

5. 実数 α，x に対し，$\alpha\to0$ の極限で

$$\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}$$

の極限関数を示せ．また，どのような x の区間で収束は一様か.

6. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$$

が一様絶対収束するための複素数 z の範囲を示せ.

7. $$\sum_{n=1}^{\infty}n!\,z^n$$

の収束半径はいくらか.

8. 超幾何級数(2.13)について，次の関係を証明せよ：

(i) $(1+z)^a=F(-a,\ b,\ b\ ;\ -z)$,

(ii) $\sin^{-1}z=zF\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\ ;\ z^2\right)$

9. 原点に集積する無限点列上で，ベキ級数で表わされたある関数がゼロとなるなら，その関数は至るところゼロであることを示せ．

10. 収束半径1のベキ級数の係数 c_n の性質(2.16)に対する収束・発散の条件(2.17)の(i)-(iii)を証明せよ．
[ヒント：クンマーの判定法(演習問題1の11)を応用してみよ]．

11. 超幾何級数 $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma\ ;\ z)$ の単位円 $|z|=1$ の上での絶対収束のための条件を示せ．

12. 関数 $w=(z^2+1)^{1/2}$ は，複素平面にどのような分岐カットを入れれば一意的関数となるか．[ヒント：2つの分岐点を z_1，z_2 とし，$z-z_1=r_1\mathrm{e}^{i\theta_1}$，$z-z_2=r_2\mathrm{e}^{i\theta_2}$ と書くと，$w=(r_1r_2)^{1/2}\mathrm{e}^{i(\theta_1+\theta_2)/2}$．分岐点 z_1 あるいは z_2 のいずれかを一周したとき，それらの両者を同時に回ったときの w の偏角の変化を考えてみよ]．

13. k_1，k_2 は x，n に独立な正数で，$w_n(x)$ は区間 $a\leqq x\leqq b$ で

$$|w_n(x)|<k_1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}|w_{n+1}(x)-w_n(x)|<k_2$$

を満たし，$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ は x に独立な収束級数とする．このとき区間 $a\leqq x\leqq b$ で，次の級数は一様収束することを示せ：

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_nw_n(x)$$

3. 正則関数

3.1 微分可能性

複素関数論で基本的なのは，前章で考察した連続性に加えて，関数の微分可能性である．これは実関数の場合と形は同じであるが，その内容はおおいに異なる．

複素変数 z の関数 $f(z)$ は，次の極限値

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=f'(z) \tag{3.1}$$

が存在するとき，点 z で微分可能であるという．ただし $h\to 0$ とは，$h=|h|\mathrm{e}^{i\varphi}$ と書いたとき任意の偏角 φ に対して $|h|\to 0$ を意味する．すなわち，h が複素面のどの方向から 0 に近づいても，上の式が同じ極限値に収束するとき，またそのときに限って微分可能(differentiable)といい，その極限値を導関数(derivative)とよんで

$$f'(z), \qquad \text{あるいは} \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}$$

と書く．式(3.1)は

$$f(z+h)=f(z)+hf'(z)+o(h) \tag{3.2}$$

と書くこともできる．ここで $o(h)$ は，$h\to 0$ のとき h よりも高次の微小量であることを意味する記号である．すなわち $o(h)=\varepsilon h$ とおくと，$|h|\to 0$ のとき ε も $|\varepsilon|\to 0$ となることを意味する．

関数 $f(z)$ の微分可能性は別の形で述べることもできる．すなわち，任意の正数 ε が与えられたとき，適当な正数 δ が存在して，$|z_1-z|<\delta$ なるすべての z_1 に対し

$$\left| f'(z) - \frac{f(z_1)-f(z)}{z_1-z} \right| < \varepsilon \tag{3.3}$$

を満たす関数 $f'(z)$ が存在するとき，$f'(z)$ を点 z での導関数という．

任意の偏角 φ に対して，式(3.1)の極限値が存在するという微分可能性の条件はかなりきびしいようにみえるが，きわめて多くの複素関数が微分可能であり，複素関数論もそこに立脚点がある．例えば，$f(z)=z^n$ (n：自然数)という関数を考えると，その導関数は

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{(z+h)^n-z^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{nz^{n-1}h+O(h^2)}{h}=nz^{n-1} \tag{3.4}$$

となり，実関数の場合と同じ形である．大文字の $O(h^2)$ は，$h\to 0$ のとき h^2 と同程度の微小量を意味する．

複素平面のある領域 D* のどの点でも $f(z)$ が微分可能なとき，$f(z)$ は D において正則(regular あるいは holomorphic)であるといい，そのような関数は正則関数という．点 z_0 を含むその近傍で $f(z)$ が正則のとき z_0 を正則点(regular point)という．正則でない点は特異点(singular point)といわれる．後に述べる意味において(5章)，$f(z)$ は正則のとき解析的であり，正則関数は解析関数ともいわれる．もし点 z_0 が関数 $f(z)$ の正則点なら，$f(z)$ は z_0 で連続である(演習問題3の4)．

微分についていくつかの性質を挙げておこう．

(1) 正則関数の和，積，商や合成関数の微分法は実関数の場合と同様である．$f(z)$，$g(z)$ を2つの正則関数とすると

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{(i)} & (af(z)\pm bg(z))'=af'(z)\pm bg'(z) \quad a, b \text{ 複素定数} \\
\text{(ii)} & (f(z)g(z))'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z) \\
\text{(iii)} & (f(z)/g(z))'=(f'(z)g(z)-f(z)g'(z))/g^2(z), \quad g\neq 0 \\
\text{(iv)} & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}f[g(z)]=g'(z)f'[g(z)]
\end{array}\right\} \tag{3.5}$$

(2) ベキ級数は一様収束の領域内で何回でも項別に微分が可能である．いま，

---

* 領域というときには常に，平面上の点の連結された開集合を意味する．すなわち，集合のどの点も内点であって，どの2点も集合の中の曲線で結ぶことができる．点 P が集合の内点であるとは，P に十分近いすべての点が集合に属するときをいう．導関数は内点に対して定義される．

ベキ級数

$$P(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$$

の収束半径を R とすると $R=\lim_{n\to\infty}|a_n|/|a_{n+1}|$．このとき，ベキ級数 $P(z)$ は $|z|<R$ で一様収束する．級数 $P(z)$ の各項を微分すると

$$P'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n z^{n-1}$$

この級数の収束半径は

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n|a_n|}{(n+1)|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=R$$

で与えられ，やはり $P(z)$ の収束半径 R と一致する．したがって，$|z|<R$ で級数 $\sum na_n z^{n-1}$ は一様収束し，連続関数 $P'(z)$ を与える．関数 $P(z)$ は収束円の内部($|z|<R$)で微分可能であることから，そこで正則である．

［例 1］　導関数の例を示そう．

（a）　指数関数 $\mathrm{e}^z=\sum_n z^n/n!$ の収束半径は ∞ で，任意の z に対し一様収束する．ゆえに $\mathrm{d}\mathrm{e}^z/\mathrm{d}z$ は，級数の項別微分により

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{e}^z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}=\mathrm{e}^z \tag{3.6}$$

を得る．

（b）　式(2.31)，(2.32)より，同様にして

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sin z=\cos z,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\cos z=-\sin z \tag{3.7}$$

（c）　対数関数 $w=\ln z$ は $z=\mathrm{e}^w$ とも書ける．これを z で微分すると，$1=\mathrm{e}^w\mathrm{d}w/\mathrm{d}z=z\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}z$ であるから(式(3.5)の(iv)，(3.6)を使う)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln z=\frac{1}{z} \tag{3.8}$$

（d）　公式(3.5)の第 4 式，式(3.8)より

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln f(z)=f'(z)/f(z) \tag{3.9}$$

3.2 コーシー・リーマンの方程式

さて，微分可能性から導かれる重要な性質を考察しよう．まず，$z=x+iy$ の関数 $f(z)$ の実部および虚部が 2 つの実関数 $u(x,y)$，$v(x,y)$ で表わされるとする：

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

$f(z)$ が導関数 $f'(z)$ をもつという条件は，u と v の導関数の間の方程式で表わすことができる．$\Delta f=f(z+\Delta z)-f(z)$ とすると，式(3.4)より $\Delta f=f'(z)h+o(|h|)$ と表わせる．ここで，$h=\Delta z=\Delta x+i\Delta y$，$\Delta f=\Delta u+i\Delta v$，$f'(z)=p+iq$ と書くと

$$\Delta u+i\Delta v=(p+iq)(\Delta x+i\Delta y)+o(|h|),\quad |h|=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

左右両辺の実部と虚部のそれぞれが等しいことから

$$\text{実部}：\Delta u=p\Delta x-q\Delta y+o(|h|) \tag{3.10 a}$$

$$\text{虚部}：\Delta v=q\Delta x+p\Delta y+o(|h|) \tag{3.10 b}$$

となる．式(3.10 a)において，$\Delta y=0$ として(実軸に平行に) $\Delta x\to 0$ とすると，$o(|h|)=o(|\Delta x|)$ は $|\Delta x|$ より高次の微小量だから，偏導関数 $\partial u/\partial x$ が存在してそれは p に等しい．同様に $\partial u/\partial y$ が存在して，それは $-q$ に等しい：

$$\partial u/\partial x=p,\qquad \partial u/\partial y=-q \tag{3.11}$$

同様に，式(3.10 b)より

$$\partial v/\partial x=q,\qquad \partial v/\partial y=p \tag{3.12}$$

ゆえに，$f(z)$ が微分可能ならば

$$\partial u/\partial x=\partial v/\partial y,\qquad \partial u/\partial y=-\partial v/\partial x \tag{3.13}$$

なる関係がなりたつ．これは**コーシー・リーマン**(Cauchy-Riemann)の方程式とよばれる．偏導関数 $\partial u/\partial x$，$\partial u/\partial y$ は u_x，u_y とも書く．

この関係は $f(z)$ が微分可能であるための必要条件として導かれたが，これは十分条件にもなる．それを示すには，u，vの偏導関数が存在して，みな連続であることを仮定する．このとき

$$\begin{aligned}\Delta u&=u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)\\&=u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y+\Delta y)+u(x,y+\Delta y)-u(x,y)\\&=(u_x(x,y)+\varepsilon)\Delta x+(u_y(x,y)+\eta)\Delta y\end{aligned}$$

最後の式の ε，η は，u_x，u_y の連続性から，$\varDelta x\to 0$，$\varDelta y\to 0$ のとき $\varepsilon\to 0$，$\eta\to 0$ となる高次微小項である．$\varDelta v=v(x+\varDelta x,y+\varDelta y)-v(x,y)$ についても同様で，両者は簡単に

$$\varDelta u=u_x\varDelta x+u_y\varDelta y+o(|h|),\quad \varDelta v=v_x\varDelta x+v_y\varDelta y+o(|h|)$$

と書ける（$|h|=\sqrt{\varDelta x^2+\varDelta y^2}$）．したがって

$$\begin{aligned}\varDelta f=\varDelta u+i\varDelta v&=(u_x+iv_x)\varDelta x+(u_y+iv_y)\varDelta y+o(|h|)\\&=(u_x+iv_x)(\varDelta x+i\varDelta y)+o(|h|)\end{aligned}$$

を得る．最後の等式を得るのに，式(3.13)の関係を用いた．ゆえに

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}=\lim_{\varDelta z\to 0}\frac{\varDelta f}{\varDelta z}=u_x+iv_x=v_y-iu_y \tag{3.14 a}$$

$$=u_x-iu_y=v_y+iv_x \tag{3.14 b}$$

である．すなわち，導関数が存在してかつ一意的に定まるから，$f(z)$ は正則である．

コーシー・リーマンの方程式(3.13)は複素関数論の基本的関係であり，次の定理の形にまとめられる．

定理（コーシー・リーマンの定理）　複素関数 $f(z)$ の実部および虚部を $u(x,y)$，$v(x,y)$ とする．複素数 $z\,(=x+iy)$ の面上のある領域 D で，u，v およびそれらの偏導関数が存在し，連続でかつ方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{3.15}$$

を満たすならば，関数 $f(z)$ は領域 D 上で正則である．

例題 1　関数 $f(z)=\bar{z}$ はコーシー・リーマンの方程式を満足しないことを示せ．

▶ $z=x+iy$，$f=u+iv$ とすると $\bar{z}=x-iy$ であるから，$u=x$，$v=-y$．ゆえに $u_x=1$，$v_y=-1$．よって $u_x\neq v_y$．　□

系　コーシー・リーマンの方程式がなりたてば，$w=u+iv$ は z と $\bar{z}$ を独立変数とみなしたとき z のみの関数で，$w=f(z)$ の形に書ける．このとき，$u(x,y)$ か $v(x,y)$ のいずれかが与えられれば，$w=f(z)$ は付加定数を除い

て一意的に定まる．

▶$z=x+iy$，$\bar{z}=x-iy$ を x，y について解くと

$$x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\quad y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$$

であるから，$\partial x/\partial z=1/2$，$\partial x/\partial \bar{z}=1/2$，$\partial y/\partial z=1/2i$，$\partial y/\partial \bar{z}=-1/2i$ である．そこで，$\partial w/\partial \bar{z}$ を計算し，式(3.15)を使うと

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}&=\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u+iv)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial \bar{z}}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right)=0\end{aligned}$$

したがって，w は $\bar{z}$ を含まず，z だけの関数である．

いま，$u(x,y)$ が与えられたとする．これに対応する $v(x,y)$ として2つの v_1，v_2 が存在したとする．これらはコーシー・リーマンの方程式を満たすから

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v_1}{\partial y}=\frac{\partial v_2}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v_1}{\partial x}=-\frac{\partial v_2}{\partial x}$$

である．ゆえに，$\partial(v_1-v_2)/\partial x=0$，$\partial(v_1-v_2)/\partial y=0$ がなりたち，v_1-v_2 は x も y も含まないから定数にすぎない．したがって，$v(x,y)$ は定数を除いて一意的に定まり，$f(z)$ も同じく定数を除いて一意的に定まる．$v(x,y)$ が与えられた場合も同様である．□

1つの複素関数の実部と虚部の関数 u，v は互いに共役であるといわれる．

3.3　正則関数の性質

正則関数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ が，x，y に関して2次の偏導関数を有し，それらが連続とする(実は第5章で示すように，正則関数は無限回微分可能である)．式(3.15)の各式をもう一度微分することにより，u，v はいずれもラプラスの方程式

$$u_{xx}+u_{yy}=0,\quad v_{xx}+v_{yy}=0 \tag{3.16}$$

を満足することが示される．ラプラス方程式を満たす実関数は調和関数(harmonic function)とよばれる．すなわち，正則関数の実部および虚部は調和関数である．ラプラス演算子

$$\triangle=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

はラプラシアン(Laplacian)とよばれ，式(3.16)は $\triangle u=0$，$\triangle v=0$ とも書かれる．例えば，$z=x+iy$ の2次関数 $f(z)=z^2$ については，$u=x^2-y^2$，$v=2xy$ であるから，$\triangle u=0$，$\triangle v=0$ がなりたつことは直ちに示せる．

正則関数は，次の基本的な性質を有する．

(i)　ある領域で関数 $f(z)$ が正則で $f'(z)$ が恒等的に0ならば，$f(z)$ は定数である．

▶ $f=u+iv$ とするとき，$f'(z)=\partial f/\partial x=u_x+iv_x\equiv 0$．ゆえにその領域全体で恒等的に $u_x=0$，$v_x=0$．コーシー・リーマンの式より $v_y=0$，$u_y=0$ も恒等的になりたつので，$u=$定数，$v=$定数 でなければならない．　□

(ii)　ある領域で $f(z)$ が正則で，かつ $|f(z)|$ が一定ならば，$f(z)$ 自身が定数である．

▶ $|f(z)|=c$ (定数)とおく．もし $c=0$ なら $f(z)=0$ である．$c\neq 0$ の場合，$f=u+iv$ とすると $u^2+v^2=c^2$ であるから，x あるいは y について微分すると

① $uu_x+vv_x=0$,　　② $uu_y+vv_y=0$

式①にコーシー・リーマンの関係を適用すると $uv_y=vu_y$ を得る．この関係を，式②から得られる2つの方程式 $v_y(uu_y+vv_y)=0$，$u_y(uu_y+vv_y)=0$ に用いると

$$v({u_y}^2+{v_y}^2)=0, \qquad u({u_y}^2+{v_y}^2)=0$$

が恒等的になりたつ．ここで $c\neq 0$ であるから，$u_y=0$，$v_y=0$ であり，コーシー・リーマンの関係から $u_x=0$，$v_x=0$ となって，$f(z)=$定数が得られる．　□

例題 2　(a)　$u(x,y)=\mathrm{e}^{-x}(x\sin y-y\cos y)$ が調和関数であることを示せ．

(b)　この $u(x,y)$ を実部とする正則関数 $f(z)$ およびその虚部 $v(x,y)$ を求めよ．

解　(a)　$u_x=\mathrm{e}^{-x}(-x\sin y+\sin y+y\cos y)$，$u_y=\mathrm{e}^{-x}(x\cos y-\cos y$

$+y\sin y)$

$$u_{xx}=\mathrm{e}^{-x}(x\sin y-2\sin y-y\cos y)$$
$$u_{yy}=\mathrm{e}^{-x}(-x\sin y+2\sin y+y\cos y)$$
$$\therefore\quad \Delta u=u_{xx}+u_{yy}=0$$

（b）　$f(z)$ の導関数は式(3.14 b)より $f'(z)=u_x-iu_y$ で与えられるから，(a)で求めた式より

$$f'(z)=\mathrm{e}^{-x}(-x(\sin y+i\cos y)+\sin y+i\cos y$$
$$+y(\cos y-i\sin y))$$
$$=\mathrm{e}^{-x}(i-ix+y)(\cos y-i\sin y)$$
$$=\mathrm{e}^{-x}(i-iz)\mathrm{e}^{-iy}=i\mathrm{e}^{-z}-iz\mathrm{e}^{-z}$$

最後の式は，$f(z)=iz\mathrm{e}^{-z}+$定数　の導関数に等しい．§3.2 の系よりこれが求める $f(z)$ である．定数を，与えられた実部 $u(x,y)$ を表わすように定めると

$$f(z)=iz\mathrm{e}^{-z}+i\alpha\quad(\alpha：実定数),$$
$$v(x,y)=\mathrm{e}^{-x}(x\cos y+y\sin y)+\alpha.$$

□

演習問題3

1. 次の関数に対し，コーシー・リーマンの関係を示せ：

　　（i）e^z,　　（ii）$\ln z$,　　（iii）$z^{\frac{1}{2}}$

2. 純実関数は，定数の場合を除けば正則ではないことを示せ.

3. 次の関数の導関数を示せ．ただし a は複素定数とする.

　　（i）a^z,　　（ii）z^z,　　（iii）$\sin^{-1} z$,　　（iv）$\cosh^{-1} z$

4. もし関数 $f(z)$ が点 z_0 で正則なら，$f(z)$ は z_0 で連続であることを証明せよ.

5. 複素関数 $w(x, y)=u(x, y)+i\,v(x, y)$ は, $z=x+i\,y$, $\bar{z}=x-i\,y$ を独立変数として，$w=W(z, \bar{z})$ とも書ける．このとき，次の2つの等式は同等であることを示せ：

$$\triangle w=w_{xx}+w_{yy}=0, \qquad \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} W(z, \bar{z})=0$$

6. 次に示す関数 $u(x, y)$ は調和関数であることを確かめ，さらに u を実部とする正則関数 $f(z)$ を定めよ ($z=x+i\,y$)：

　　（a）$u=\sin x \cosh y$,　　（b）$u=\dfrac{|A|^2-|z|^2}{|A-z|^2}$　（A：定数）

7. 極座標 (r, θ) を独立変数とするとき，コーシー・リーマンの方程式は次の形に表わせることを示せ．ただし，$u(r, \theta)$, $v(r, \theta)$ は複素関数の実部および虚部とする：

$$u_r=\frac{1}{r} v_\theta, \qquad \frac{1}{r} u_\theta=-v_r$$

8. 式(2.13)の超幾何級数 $F(\alpha, \beta, \gamma\,;\,z)$ は次の超幾何微分方程式を満たすことを証明せよ：

$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}z^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}-\alpha\beta F=0$$

4. 複素積分とコーシーの積分定理

4.1 複素積分

実数値関数の積分は，実変数の区間を無数の無限小区間に分割し，各区間の和の極限として定義される．複素関数の場合も形式的に同じ定義が適用されるが，こちらは複素平面上の曲線に沿う線積分が考察の対象となる．

複素平面(z 面)上のなめらかな曲線 C を考える(図 4.1)．関数 $f(z)$ は C 上のどの点でも連続とする．曲線 C の始点を $\mathrm{A}=z_0$，終点を $\mathrm{B}=z_n$ とし，C 上に任意に $n-1$ 個の点を選び，順に $z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}$ とする．z_k-z_{k-1} を Δz_k とし，和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k \tag{4.1}$$

をつくる．ただし，ζ_k は z_{k-1} と z_k の間の C 上の任意の点とする．分割の数 n を限りなく大きくし，最大の弧長 $|\Delta z_k|_{\max}$ は限りなく小さくなるようにとる．このとき和 S_n の極限値が，z_k と ζ_k のとり方によらず存在するならば，その極限値をもって C に沿う $f(z)$ の積分と定義し

$$\int_{\mathrm{C}} f(z)\mathrm{d}z=\lim_{\substack{n\to\infty \\ |z_k|\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k \tag{4.2}$$

と書く．この複素積分は実積分の問題に帰着させることができる．

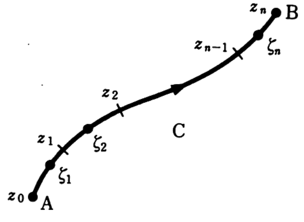


図 4.1

実際，$z=x+iy$，$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ と書き，さらに

$$z_k=x_k+iy_k, \qquad \zeta_k=\xi_k+i\eta_k \quad (k=0,1,\cdots,n)$$

としよう．このとき和(4.1)を実部・虚部に分けると

$$\begin{aligned} S_n&=\sum_{k=1}^{n}\{u(\xi_k,\eta_k)+iv(\xi_k,\eta_k)\}\{\Delta x_k+i\Delta y_k\} \\ &=\sum_k\{u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k-v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\} \\ &\quad+i\sum_k\{v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\} \end{aligned} \tag{4.3}$$

となる．ただし

$$\Delta x_k=x_k-x_{k-1}, \qquad \Delta y_k=y_k-y_{k-1}$$

である．点 ζ_k は曲線 C 上にあるから，実部 ξ_k が与えられれば虚部 η_k も決まる．η_k が与えられても同様である．分割の数 n を限りなく大きくした極限 ($|\Delta z_k|_{\max}\to 0$) では，式(4.3)の右辺の和は実関数の線積分の形になっている．そこで実関数積分として考えれば，$u(x,y)$，$v(x,y)$ が曲線 C 上で連続という性質があるとき式(4.3)の右辺の極限値が存在する．このようにして，式(4.2)の複素積分は

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C(u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y)+i\int_C(v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y) \tag{4.4}$$

と表わすことができる．曲線 C は，なめらかな曲線あるいはその有限個の結合，すなわち C は区分的になめらかな曲線とする(図 4.2(a))．

複素積分(4.4)に関しては実数積分に対するのと同じ諸公式がなりたつ．

(i)　任意の 2 つの関数 $f(z)$，$g(z)$ および任意の 2 つの複素定数 a，b に対して

$$\int_C\{af(z)+bg(z)\}\mathrm{d}z=a\int_C f(z)\mathrm{d}z+b\int_C g(z)\mathrm{d}z \tag{4.5}$$

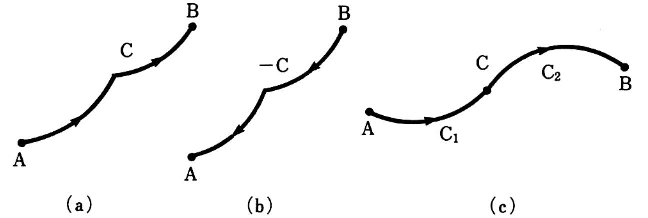


図 4.2

（ii）　曲線Cに沿って逆向きの積分を$-$Cで表すとき(図4.2(b))

$$\int_{-C} f(z)\mathrm{d}z = -\int_C f(z)\mathrm{d}z \tag{4.6}$$

（iii）　曲線Cが2つの曲線C_1，C_2の結合からなっているとき(図4.2(c))

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z \tag{4.7}$$

曲線Cが閉曲線のときは(図4.3(a))，それを記号的に

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z$$

と書き，閉曲線積分あるいは周積分(contour integral)という．閉曲線C上に2点A，Bをとり，それらを結ぶ曲線ABを加え，その上の往路と復路の積分を考えると，2つの閉曲線C_1とC_2が生ずる(図4.3(b))．このとき次の等式がなりたつ．

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z \tag{4.8}$$

微小な線分dzの長さをds=|dz|とすると，2点ABを結ぶ曲線Cの長さLは

$$L = \int_C |\mathrm{d}z| = \int_A^B \mathrm{d}s, \qquad \mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} \tag{4.9}$$

と書くことができる．

後の目的のために，複素積分の不等式評価のいくつかを示す．

（iv）　$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \leqq \int_C |f(z)||\mathrm{d}z| = \int_C |f(z)|\mathrm{d}s \tag{4.10}$$

▶式(4.1)の絶対値をとると

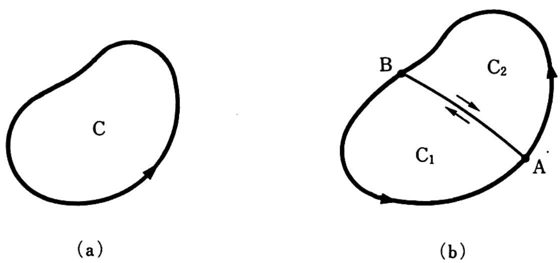


図4.3

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \leqq \sum_{k=1}^{n}|f(\zeta_k)||\Delta z_k| \leqq \sum_{k=1}^{n}|f(\zeta_k)|\Delta s_k$$

$|\Delta z_k|$ は曲線部分の弦の長さで，Δs_k は弧の長さである．極限をとれば上式が得られる．□

(v)　C 上で $|f(z)| \leqq M$（有界）ならば，式(4.9)，(4.10)より

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \leqq M\int_C \mathrm{d}s = ML \quad (M：正定数) \tag{4.11}$$

(vi)　C 上で $|f(z)-g(z)| < \varepsilon$ ならば，式(4.10)より

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z - \int_C g(z)\mathrm{d}z\right| \leqq \int_C |f(z)-g(z)|\,\mathrm{d}z < \varepsilon L \tag{4.12}$$

(vii)　C 上で $f_n(z)$ が一様に $f(z)$ に収束すれば

$$\lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)\mathrm{d}z = \int_C f(z)\mathrm{d}z \tag{4.13}$$

▶ n を十分大きくとれば，C 上で $|f_n(z)-f(z)| < \varepsilon$ となるからである．□

［例 1］　関数 $f_1(z) \equiv a+bz$（a, b：定数）を曲線 C 上で積分することを考える．性質(i)により，その積分 I は

$$I = \int_C (a+bz)\mathrm{d}z = a\int_C \mathrm{d}z + b\int_C z\,\mathrm{d}z \tag{4.14}$$

と書ける．右辺の 2 つの積分を別々に評価しよう．積分の定義に従って，C 上に端点 $z_A = z_0$ から他端 $z_B = z_n$ の間に $(n-1)$ 個の分点 $z_1, \cdots, z_{n-1}$ をとり，弧長 $\sigma_k = |z_k - z_{k-1}|$ に対し $\max\sigma_k = \sigma$ とする．極限 $n\to\infty$ および $\sigma\to 0$ を単に lim と書くことにすると，まず最初の積分は

$$\int_C \mathrm{d}z = \lim\sum_{k=1}^{n}(z_k - z_{k-1}) = z_n - z_0 = z_B - z_A \tag{4.15}$$

を得る．積分の結果は曲線 C の両端の点の座標 z_A，z_B だけで表わされることがわかる．すなわち，積分の値は積分路の途中の道すじにはよらず，C の両端の位置だけで決まる．特に，$z_B = z_A + \Delta z$ と書けば

$$\int_{z_A}^{z_A+\Delta z} \mathrm{d}z = \Delta z \tag{4.16}$$

第 2 の積分は

$$\int_{\mathrm{C}} z\,\mathrm{d}z = \lim \sum_{k=1}^{n} \zeta_k (z_k - z_{k-1})$$

と書ける．ζ_k は C 上の 2 点 z_{k-1}, z_k 間の任意の点でよい．それゆえ

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{C}} z\,\mathrm{d}z &= \lim \sum_{k=1}^{n} z_{k-1}(z_k - z_{k-1}) = \lim \sum_{k=1}^{n} z_k (z_k - z_{k-1})\\ &= \lim \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k + z_{k-1}}{2}(z_k - z_{k-1}) = \lim \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} ({z_k}^2 - {z_{k-1}}^2)\\ &= \frac{1}{2}({z_{\mathrm{B}}}^2 - {z_{\mathrm{A}}}^2) \end{aligned} \tag{4.17}$$

の結果を得る．この積分も C の端点 z_{A}, z_{B} だけで表わされ，途中の径路にはよらない．以上をまとめると

$$I = \int_{c} (a + bz)\mathrm{d}z = a(z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}) + \frac{1}{2} b ({z_{\mathrm{B}}}^2 - {z_{\mathrm{A}}}^2) \tag{4.18}$$

を得る．もし C が閉曲線だとすると，$z_{\mathrm{B}} = z_{\mathrm{A}}$ だから

$$I = \oint_{\mathrm{C}} f_1(z)\mathrm{d}z = \oint_{\mathrm{C}} (a + bz)\mathrm{d}z = 0 \tag{4.19}$$

を得る．これは見かけ以上に重要な内容をもつことを後で見るであろう．

いま，C の一端 z_0 を固定し，他端を動点 z とすると，$f_1(z) = a + bz$ に対し

$$\int_{\mathrm{C}} f_1(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \int_{z_0}^{z} f_1(\zeta)\mathrm{d}\zeta = F_1(z), \quad F_1(z) = az + \frac{1}{2} bz^2 - az_0 - \frac{1}{2} b{z_0}^2$$

この積分は z の関数なので $F_1(z)$ と書くことができる．

一般に，連続な関数 $f(z)$ の積分が積分路の両端に点 z_0, z のみで定まるとすると，次の積分

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = F(z) \tag{4.20}$$

は z_0 を固定すれば z の関数 $F(z)$ と書ける．このとき $F(z)$ は微分可能で，導関数は $f(z)$ に等しい：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} F(z) = f(z) \tag{4.21}$$

▶実際，2 点 z, $z + \Delta z$ における $F(z)$ の値の差は

$$F(z+\Delta z)-F(z)=\int_{z}^{z+\Delta z}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

で，両辺から $f(z)\Delta z$ を引くと

$$F(z+\Delta z)-F(z)-f(z)\Delta z=\int_{z}^{z+\Delta z}(f(\zeta)-f(z))\mathrm{d}\zeta \qquad (4.22)$$

と書ける．ここで式 (4.16) および(i)を用いた．関数 $f(z)$ は連続であるから，$|\zeta-z|<\delta$ なるとき $|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$ とすれば，性質(vi)を式(4.22)に適用すると

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|<\varepsilon$$

を得る．ε は任意であるから，これは式(4.21)を意味する．　□

4.2　コーシーの積分定理

複素関数論の中で最も重要な定理がコーシー (Cauchy) の積分定理である．

定理（コーシーの積分定理）　関数 $f(z)$ が領域 D で正則で，任意の単純閉曲線* C がその内部も含めてすべて D に属するとする．このとき

$$\oint_{\mathrm{C}} f(z)\mathrm{d}z=0 \qquad (4.23)$$

である．ただし，C の長さは有限とする．

▶曲線 C を含む領域 $\mathrm{D}_1(\subset \mathrm{D})$ を実軸および虚軸に平行な直線群の網の目

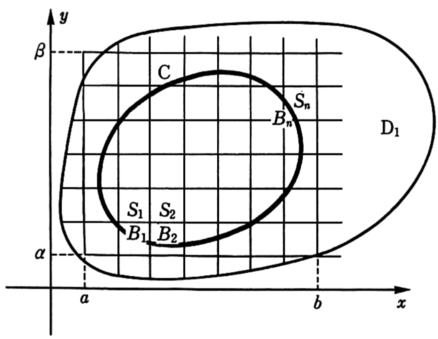


図 4.4

* 単純曲線とは重複点を有しない曲線のことで，ジョルダン(Jordan)曲線ともいわれる．

によって多数の小部分に分割する(図 4.4). 簡単のために, 直線群は等しい間隔 l をもつとする(不等間隔でも以下の議論はなりたつ). C の内部において, 曲線 C にかからない正方形の部分が M 個あったとして, それらを $S_1, \cdots, S_M$ とし, 曲線 C にかかって正方形でない形をした部分が N 個あったとして, それらを $B_1, \cdots, B_N$ とする. このとき, C に関する積分は, 式(4.7)の関係をくり返し使って

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{m=1}^{M} \oint_{\partial S_m} f(z)\mathrm{d}z + \sum_{n=1}^{N} \oint_{\partial B_n} f(z)\mathrm{d}z \tag{4.24}$$

と表わせる. ここで, ∂S_m, ∂B_n は領域 S_m, B_n の外周上の閉曲線である.

関数 $f(z)$ が正則であることから, C の内部の任意の点 z_0 において任意の正数 ε に対し適当に正数 δ をとれば, $|z-z_0|<\delta$ のすべての z について

$$|f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)|<\varepsilon|z-z_0| \tag{4.25}$$

が満たされる. ここで, $f(z)$ が D で一様に微分可能である性質を使う. すなわち"任意の ε に対し十分細かい網目をとり, どの領域 S_m, B_n においても, 外周を含めてそのすべての点 z に対し, 式(4.25)がなりたつような点 z_0 がある"(これは後で検討する).

正方形 S_m の一辺の長さ l を, いま l_m と書くことにする($l_m=l$). 正方形の 1 つ S_m に注目するとき, 式(4.25)より

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\phi(z),$$
$$|\phi(z)|<\varepsilon|z-z_0| \tag{4.26}$$

と書けるから

$$\oint_{\partial S_m} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{\partial S_m} \{f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)\}\mathrm{d}z + \oint_{\partial S_m} \phi(z)\mathrm{d}z \tag{4.27}$$

を得る. ところが, 1 つの S_m では z_0 は定数であるから, 右辺第 1 項の被積分関数は前節の例 1 の $f_1(z)$ と同じ形をしており, z について線形である. しかもそこで示したように, その閉曲線積分はゼロであり, したがって第 1 項は消える. 他方, 第 2 項の積分については, 前節の性質(v)と式(4.26)より

$$\left|\oint_{\partial S_m}\phi(z)\mathrm{d}z\right|<\varepsilon(\sqrt{2}\,l_m)(4\,l_m)$$

がなりたつ．というのは，$|z-z_0|\leqq\sqrt{2}\,l_m$，全長は $L=4\,l_m$ と書けるからである．

次に境界の領域 B_n においても，式(4.27)で ∂S_m の代わりに ∂B_n とした式がなりたち，やはり第1項は消える．第2項についても $|z-z_0|\leqq\sqrt{2}\,l_n$，$L\leqq 4\,l_n+b_n$ ($l_n=l$，b_nはCから切り取った曲線部の長さ) がなりたつから

$$\left|\oint_{\partial B_n}\phi(z)\mathrm{d}z\right|<\varepsilon\sqrt{2}\,l_n(4\,l_n+b_n)$$

と書ける．全部を加えると

$$\left|\oint_{\mathrm{C}}f(z)\mathrm{d}z\right|<4\sqrt{2}\,\varepsilon(\sum_m l_m{}^2+\sum_n l_n{}^2)+\sqrt{2}\,\varepsilon\sum_n l_nb_n.$$

図4.4に示したように，Cをすっぽり囲む長方形の面積を S とし（図では $S=(b-a)(\beta-\alpha)$），曲線Cの長さを L_{C} とすると

$$\sum_{n=1}^{M} l_m{}^2+\sum_{n=1}^{N} l_n{}^2=(M+N)\,l^2\leqq S\quad(\text{定数})$$

$$\sum_{n=1}^{N} l_nb_n=l\sum_n b_n=l\,L_{\mathrm{C}}\leqq\sqrt{S}\,L_{\mathrm{C}}$$

である．ゆえに，定数 $K=4\sqrt{2}\,S+\sqrt{2}\sqrt{S}\,L_{\mathrm{C}}$ を導入すると

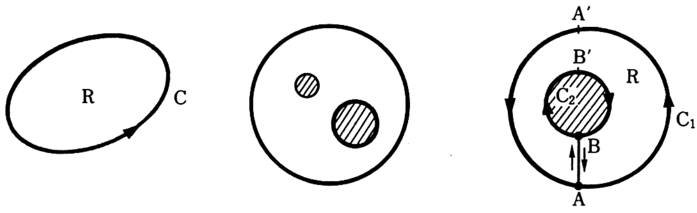
$$\left|\oint_{\mathrm{C}}f(z)\mathrm{d}z\right|<K\varepsilon$$

がなりたつ．正数 ε は任意にとることのできる数であったから

$$\oint_{\mathrm{C}}f(z)\mathrm{d}z=0$$

が導かれる．

最後に一様微分可能性について補足しておく．式(4.25)を満足しない網目 R_0 があったときには，辺の長さが前の1/2になるように分割することにする．この操作をくり返していく．第 n 回目の分割で生ずる網目 R_n の辺の長さは $l/2^n$ となる．関数 $f(z)$ は D で正則という性質をもっ



(a) (b) (c)

図 4.5

ているから，n を十分大きくとれば，$|z-z_0|<\sqrt{2}\,l/2^n$ のすべての z(すなわち R_n 内のすべての z)に対し，式(3.3)と同様に式(4.25)が満たされるようになる．したがって，C 内のすべての網目で式(4.25)が満足されるようにできる．つまり，D 内で一様に微分可能である． □

式(4.23)を証明する別の方法は，式(4.4)にもとづいて，右辺の実積分をCで囲まれた面積分に変換するグリーンの定理を使う方法である．

定理(グリーンの定理) 2つの実関数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ が領域Rおよびその境界C上で微分可能で，その偏導関数も連続ならば

$$\oint_C \{P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y\}=\iint_R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (4.28)$$

である．ここで閉曲線Cに沿って積分する際の向きは，領域Rを左に見て進むものとする(図4.5(a))．

上記のグリーンの定理および前記のコーシーの積分定理において，領域Rと領域Dはいずれも単連結であることを前提としている．領域Kが**単連結**であるとは，K内にとられたすべての閉曲線Cの内部の各点がKに属することをいう．したがって，CはKからはみ出すことなく，連続的変形によって一点に縮めることが可能である．単連結でない領域は多重連結である．例えば，円の内部，長方形の内部，あるいは一般に1つの閉曲線の内部などは単連結である．他方，1つの円の内部から一点を除いたものは2重連結であり，1つの円から1つ以上の互いに交わらない円を除いた領域は多重連結である(図4.5(b))．円の外部，あるいは全平面から一点を除いた領域は2重連結である．1つの半直線で切られた平面は単連結である．

グリーンの定理を多重連結の領域 R に拡張するのは容易である．例えば，図 4.5(c)のように領域 R が外の閉曲線 C_1 と中の閉曲線 C_2 によって囲まれた領域とする．C_1 上の点 A と C_2 上の点 B を適当に選んで切断線 AB をいれる．C_1 と C_2 の向きを図のように領域 R を左に見て進む向きにとるとき，閉曲線 $C=C_1+AB+C_2+BA$ は単連結領域(すなわち R-(線分 AB))を囲む．これに上記のグリーンの定理を適用する．左辺の積分で $\int_{AB}+\int_{BA}$ は打ち消し合い，右辺の面積分で除かれた部分からの寄与はゼロである．結局，グリーンの定理の閉曲線 C としては，領域 R を左に見て進む C_1，C_2 をとればよい(C_1 を反時計回りとすると，C_2 は時計回り)．

コーシーの積分定理を，グリーンの定理を用いて証明するのは演習問題にゆだねるが，その際に導関数 $f'(z)$ の連続性を仮定しなければならない．ところが，冒頭に示した(グルサの)証明法では $f'(z)$ の連続性の仮定を要しない．さらに，曲線 C 上および内部で $f(z)$ が正則という条件も弱めることができて，$f(z)$ は C の内部で正則で，境界 C 上まで連続という条件が満たされればよい．曲線 C については，例えば連続関数 $z_B(t)$ (t は実パラメータ) によって $z=z_B(t)$ の形で表されるような連続曲線で，長さが有限である必要がある．最後の条件のために，コッホ曲線あるいはペアノ曲線(巻末文献 1 あるいは 13 頁脚注文献参照)のような長さが無限大となるフラクタル曲線は C から除外される．上記のコーシーの積分定理の証明法が多重連結領域にそのまま拡張できることは特に説明の要はないであろう．

系 1　関数 $f(z)$ が単連結の領域 D で正則ならば，積分 $\int_a^b f(z)dz$ は，D 内の点 a，b を結ぶ D 内の積分路の道すじにはよらない．

▶点 a から b に向かう 2 つの異なる積分路を A，B とする．曲線 B に沿って逆に進む積分路を B′ と書くと，曲線 A+B′ は閉曲線となる．これを C とすると，コーシーの積分定理により

$$0=\oint_C f(z)dz=\int_A f(z)dz+\int_{B'} f(z)dz=\underset{(A)}{\int_a^b} f(z)dz-\underset{(B)}{\int_a^b} f(z)dz$$

となる．すなわち，A 上の積分と B 上の積分は等しい．このことは，積分値が両端の点 a，b のみによって途中の道すじにはよらないことを意味している．　□

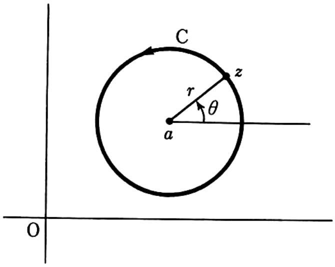


図 4.6

系 2　$f(z)$ が単連結領域Dで正則ならば，D内の点 a, z に対してとった積分

$$\int_a^z f(z)\mathrm{d}z = F(z) - F(a) \tag{4.29}$$

は，a を固定したとき z に関して正則である．また関数 $F(z)$ の導関数は $f(z)$ に等しい：$\mathrm{d}F/\mathrm{d}z = f(z)$．［式(4.21)以下に証明が示されている］.

関数 $F(z)$ は $f(z)$ の**不定積分**という.

定数 a，整数 n に対して関数 $f(z)=(z-a)^n$ を考えてみよう．n が正のときは $f(z)=z^n-naz^{n-1}+\cdots\cdots+(-a)^n$ となって n 次多項式である．n が負のときは $z=a$ で導関数は発散するので，$z=a$ は特異点である.

［例 2］　点 a を中心とする半径 r の円周C上で関数 $f(z)=(z-a)^n$ を**反時計まわり**(以下**正の向き**とよぶ)に積分してみよう(図 4.6)．ただし n は整数とする．C上の点 z を極形式で

$$z-a=re^{i\theta}, \qquad (\theta：偏角，r：定数)$$

と書くと，$\mathrm{d}z=re^{i\theta}i\,\mathrm{d}\theta$．したがって

$$(z-a)^n\mathrm{d}z=(re^{i\theta})^n re^{i\theta}i\,\mathrm{d}\theta = ir^{n+1}e^{i(n+1)\theta}\mathrm{d}\theta.$$

$n=-1$ のとき

$$\oint \frac{1}{z-a}\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} i\,\mathrm{d}\theta = 2\pi i \tag{4.30}$$

$n \neq -1$ のとき

$$\oint_C (z-a)^n\mathrm{d}z = ir^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$= ir^{n+1}\int_0^{2\pi}[\cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta]\,\mathrm{d}\theta = 0 \tag{4.31}$$

$n=-1$ の場合だけが 0 でない値 $2\pi i$ を与える．n が正の場合，円Cの内部

は $f(z)$ の正則領域であるから，コーシーの積分定理より，閉曲線C上の積分値0を得るのに計算の必要はなかった．しかし $n \leqq -2$ の場合は，Cの内部に特異点 a があり，コーシーの定理はそのままの形ではあてはまらない．しかし，結果的に積分値は0となることがわかった．□

［例 3］　指数関数 $z=\mathrm{e}^w$ は，対数関数によって $w=\ln z$ とも表わされる．その導関数は§3.1の例1(c)で示したように，$d\ln z/\mathrm{d}z=1/z$ である．したがって系2より

$$\ln z=\int_1^z \frac{\mathrm{d}z}{z} \tag{4.32}$$

積分の下限は，$z=1$ で $\ln z=0$ の性質より定まる．明らかに，$\ln z$ の導関数は $z=0$ を特異点としてもっている．例2では $n=-1$ の場合に相当し，$a=0$ とすると，式(4.30)より

$$\oint_{\mathrm{C}} \frac{\mathrm{d}z}{z}=2\pi i \tag{4.33}$$

となる．ただしCは原点を囲む任意の閉曲線（原点を正の向きに一回りする曲線）に拡張できる．このことは関数 $\ln z$ は原点を正の向きに一回りして元の点にもどると $2\pi i$ だけ増加することになり，多価関数であることを意味している（§2.6の(vi)参照）．

［例 4］　$X_1=\mathrm{e}^{z_1}$，$X_2=\mathrm{e}^{z_2}$ のとき，積 X_1X_2 はどのように与えられるであろうか．前の例3より

$$z_1=\ln X_1=\int_1^{X_1}\frac{\mathrm{d}X}{X},\quad z_2=\ln X_2=\int_1^{X_2}\frac{\mathrm{d}X}{X}$$

と表わせる．単連結の正則領域では，積分の結果は道すじによらないから

$$\begin{aligned}\ln X_1X_2&=\int_1^{X_1X_2}\frac{\mathrm{d}X}{X}=\int_1^{X_1}\frac{\mathrm{d}X}{X}+\int_{X_1}^{X_1X_2}\frac{\mathrm{d}X}{X}\\&=\int_1^{X_1}\frac{\mathrm{d}X}{X}+\int_1^{X_2}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}\quad (X=X_1\zeta)\\&=\ln X_1+\ln X_2\end{aligned} \tag{4.34}$$

したがって，$X_1X_2=\mathrm{e}^z$ とすると $z=z_1+z_2$ が得られる．すなわち，$X_1X_2=\mathrm{e}^{z_1+z_2}$ がなりたち，式(2.26)が確かめられた．

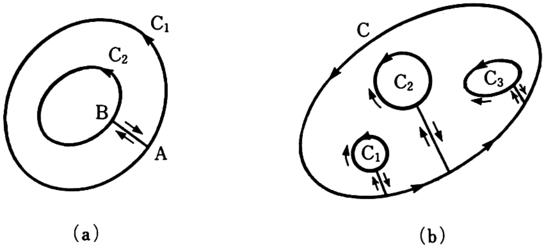


図 4.7

以下の系 3，4 は C の内部に特異点がある場合に特に有効である．

系 3　閉曲線 C_1 の内部に他の閉曲線 C_2 があって，C_1 と C_2 の間の環状の閉域で $f(z)$ が一価正則ならば

$$\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z=\oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z \tag{4.35}$$

である．ただし，積分路 C_1，C_2 は同じ向き（例えば正の向き）にとるものとする．

▶図 4.7(a)のような線分カット AB を入れて，閉曲線 $C=C_1+AB+C_2'+BA$ をつくり，コーシーの積分定理を適用する（C_2' は C_2 と反対回りの積分路）：

$$0=\oint_{C_1}+\int_{AB}-\oint_{C_2}+\int_{BA}=\oint_{C_1}-\oint_{C_2}$$ □

系 3 あるいは以下で閉域というときは，閉曲線上およびその内部を指すが，関数の正則性はその閉域を含む領域でなりたつ必要がある．(開)領域を D とするとき，その境界まで含めた閉域は［D］と書くことにする．

系 3 の結果，被積分関数の正則領域 D の中で，積分路を連続的移動で変更しても積分値が不変であることを意味し，D の中で自由に積分路を変更できることになる．この系は，一般に n 個の閉曲線が内部にある場合に拡張される．

系 4　閉曲線 C の内部に，互いに交わらない（また他を含まない）閉曲線 C_1，C_2，……，C_n があって，それらに挟まれた閉域が $f(z)$ の一価正則な領域に属するなら

$$\oint_{C} f(z)\mathrm{d}z=\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z+\oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z+\cdots\cdots+\oint_{C_n} f(z)\mathrm{d}z \tag{4.36}$$

ただし，積分はすべて正の向き（反時計まわり）にとるものとする（図 4.7(b)）.

▶系 3 と同様にして(図 4.7(b))

$$0=\oint_{C}-\oint_{C_1}-\oint_{C_2}-\cdots\cdots-\oint_{C_n}$$ □

演習問題 4

1. 反時計まわりに原点を1回まわる任意の閉曲線 C_0 に対し，次の積分を示せ：

$$\oint_{C_0} \frac{dz}{z} = 2\pi i \tag{4.37}$$

これを次の2つの方法で行なってみよ：

（i） $z=re^{i\theta}$，$dz=dre^{i\theta}+re^{i\theta}id\theta$ とおく方法．

（ii） 積分路の変更による方法（系3に従って C_0 を原点を回る円に変更することによって）．

2. 積分

$$\int_{\frac{\pi}{4}+i}^{\pi+2i} e^{iz}dz = \int_{\frac{\pi}{4}+i}^{\pi+2i} e^{-y}(\cos x + i\sin x)(dx + idy)$$

を次の2つの方法で計算せよ：

（i） 実積分の方法（式(4.4)），

（ii） 不定積分の方法（式(4.29)）．

さらに，不等式(4.11)がなりたっていることを確かめよ．

3. $$f(z) = \frac{z+1}{z^2+z+1}$$

を円 $|z|=\frac{1}{2}$ 上で一周積分した値はゼロになることを示せ．

4. 実変数 x，y の実関数 $u(x,y)$，$v(x,y)$ の1次結合によって複素関数 $F=u+iv$ を定め，x，y は

$$x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}), \qquad y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$$

でおき換え，$F=F(z,\bar{z})$ を定義する（F は必ずしも正則とは限らない）．このとき次の等式を証明せよ：

$$\oint_C F(z,\bar{z})dz = 2i\int_A \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} dx\, dy.$$

ただし，C は x，y 面の任意の反時計まわりの閉曲線で，A は C に囲まれた面積である．

5. コーシーの積分定理(4.23)をグリーンの定理(4.28)にもとずいて証明せよ．ただし導関数 $f'(z)$ は連続とする．

6. 2つの関数 u，v は x，y の実関数とする．グリーンの定理を使って，グリーン

の第1および第2恒等式を導け：

$$\oint_C u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s=\int_R(u_xv_x+u_yv_y)\mathrm{d}A+\int_R u\triangle v\,\mathrm{d}A \tag{4.38}$$

$$\oint_C\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s=\int_R[u\triangle v-v\triangle u]\mathrm{d}A \tag{4.39}$$

ここで，Cは x，y 面の領域Rを囲む閉曲線で，$\triangle$ はラプラシアン，$\partial/\partial n$ は外向き法線微分である．この結果を使って，C内の任意の調和関数 u に対し

$$\oint_C \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=0$$

を証明せよ．ここで $\mathrm{d}s$ は曲線Cの線分要素である．

7. 正則関数 $f(z)=u+iv$ に対し，次の関係を証明せよ：

$$\oint_C \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=\mathrm{Im}\oint_C f'(z)\mathrm{d}z=0$$

5. コーシーの積分公式とテイラー展開

5.1　コーシーの積分公式

コーシーの積分定理から，正則関数の重要な性質が導かれる．

定理（コーシーの積分公式）　閉曲線Cの内部および円周上で $f(z)$ が正則で，Cの内部の任意の点を a とすると

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathrm{C}}\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z \tag{5.1}$$

もし a がCの外にあるときには

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathrm{C}}\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z=0 \tag{5.2}$$

ただし積分は正の向きにとるものとする．

▶被積分関数 $f(z)/(z-a)$ は，点 a を除いて正則である．そこで a を中心として半径 ρ の円周 Γ を考える(図5.1)．4章の系3より

$$I\equiv\oint_{\mathrm{C}}\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z=\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z$$

円 Γ の半径 ρ を十分小さくとれば，$f(z)$ の連続性から，任意正数 ε に対し

$$|f(z)-f(a)|<\varepsilon,\qquad z\in\Gamma$$

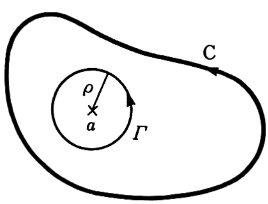


図 5.1

とできる(演習問題3の4). 上の積分で $f(z)=(f(z)-f(a))+f(a)$ と書くと

$$I=\oint_{\Gamma}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\mathrm{d}z+f(a)\oint_{\Gamma}\frac{\mathrm{d}z}{z-a}$$

を得る. 第2項は4章の例2より $2\pi i f(a)$ に等しい. 第1項の方は $|z-a|=\rho$ だから

$$\left|\oint_{\Gamma}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\mathrm{d}z\right|<\frac{\varepsilon}{\rho}\int_{\Gamma}|\mathrm{d}z|=\frac{\varepsilon}{\rho}2\pi\rho=2\pi\varepsilon$$

となる. まとめると

$$|I-2\pi i f(a)|<2\pi\varepsilon$$

となり, ε は任意の数だから

$$I=2\pi i f(a)$$

すなわち定理の最初の式を得る. a がCの外にあるときには, 関数 $f(z)/(z-a)$ はC上およびC内で正則だから, コーシーの定理から, 第2の式は明らかである. □

上の定理で, a の代わりに z と書き, 積分変数を z から ζ にかえると

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathrm{C}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta \tag{5.3}$$

と書くこともできる. ただし, Cは点 z のまわりを正の向きに回る閉曲線である. この式の著しい特徴は, 点 z での関数値をそのまわりの曲線C上の関数値で表現していることである.

5.2　平均値定理と最大値定理

まず閉曲線Cが円という特別の場合で平均値を考えてみよう. 半径 r で中心が z とすると, $\zeta-z=re^{i\theta}$, $\mathrm{d}\zeta=re^{i\theta}i\mathrm{d}\theta$ であるから, 式(5.3)は

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z+re^{i\theta})\mathrm{d}\theta \tag{5.4}$$

となる. これは, 任意の点 z での正則関数の値はその点を中心とする円周上の関数値の平均値に等しいことを述べている. 上式は複素関数の**平均値定理**としばしばよばれる. 上式を実部・虚部に分解してみれば直ちにわかるように, $f(z)$

の実部および虚部のそれぞれも(それらは実調和関数である)平均値定理を満足している.

式(5.4)の両辺に $r\,\mathrm{d}r$ を乗じて，r について 0 から R まで積分すると

$$f(z)\int_0^R r\,\mathrm{d}r=\frac{1}{2\pi}\int_0^R\int_0^{2\pi}f(z+re^{i\theta})\mathrm{d}\theta\,r\,\mathrm{d}r$$

$$\therefore\quad f(z)=\frac{1}{\pi R^2}\int_S f(\zeta)\,\mathrm{d}S \tag{5.5}$$

を得る. ここで積分は半径 R，中心 z の円の面積 S についての面積分で，ζ は S 上の点である. これもまた $f(z)$ の値が円板 S の面積全体にわたっての平均値に等しいことを述べている.

> **定理**（最大値定理）　$f(z)$ が一価正則である領域内の任意の閉域 $[D]$ において，$|f(z)|$ はその最大値を$[D]$の境界上でとる. また，もし$[D]$において $f(z)\neq 0$ ならば $|f(z)|$ はその最小値も境界上でとる.

▶ もし $[D]$ の内点 z_0 において $|f(z)|$ が最大となり，$[D]$ のどの点 z に対しても $|f(z)|\leqq|f(z_0)|$ であるとする. いま，z_0 を中心とする $[D]$ 内の任意の円 S(半径R)に対して，式(5.5)は

$$|f(z_0)|\leqq\frac{1}{\pi R^2}\int|f(z)|\,\mathrm{d}S,\qquad z\in S \tag{5.6}$$

を与える. 仮定により $|f(z)|\leqq|f(z_0)|$ であるので，S 上のすべての点 z に対して $|f(z)|=|f(z_0)|$ でない限り，式(5.6)はなりたたない. 領域 S 上で $|f(z)|$ が定数ならば $f(z)$ 自身が定数である(§3.3の(ii)). したがって $|f(z)|$ は最大値を半径 R の円周上でとらねばならない. 次にその点を中心として新しく円を描き，上の考察をくり返す. その結果(§8.1を見よ)，明らかに $f(z)$ は D のすべての点で定数である. すなわち $f(z)$ が定数である場合を除くと，$|f(z)|$ が最大となる点は境界上になければならない. もし $[D]$ において $f(z)\neq 0$ ならば，$1/f(z)$ は $[D]$ において正則だから，$|f(z)|$ は境界上で最小値をとらねばならない.　□

[**例** 1]　$[D]$ として半径1の円板 $|z|\leqq 1$ をとり，関数 $f_1(z)=z$ を考える. $|f_1(z)|$ は内点 $z=0$ において極小値 0 をとる. 他方，関数 $f_2(z)=z+2$ に

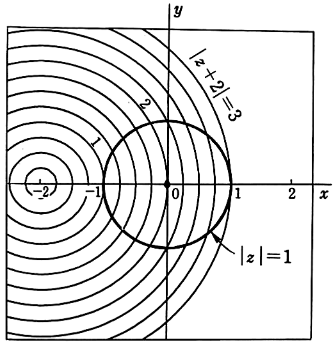


図 5.2 $|z+2|$ の等高線と円 $|z|=1$

ついては，$|f_2(z)|=\sqrt{(x+2)^2+y^2}$ は $z=-1$ で最小値 1 をとり，$z=1$ で最大値 3 をとる(図 5.2)．

5.3 調和関数

実関数 $u(x,y)$ の二階導関数 u_{xx}，u_{yy} が領域 D で存在し，かつ連続で，ラプラスの方程式(3.16)を満足するなら，関数 u は D で調和(harmonic)といわれる．ある領域 D の境界 C 上で関数値が与えられ，その内部で調和である関数を求めよというのは，典型的な調和関数の問題である．これは**ディリクレ**問題(Dirichlet problem)とよばれる．他方，境界上で法線微分の値が与えられる問題もあり，それは**ノイマン**問題(Neumann problem)といわれる．

1 つの複素関数 $f(z)=u+iv$ を構成する共役な関数 u，v を使えば，一方は他方の問題に変換される．というのは，コーシー・リーマンの関係から，境界上で

$$\frac{\partial u}{\partial s}=-\frac{\partial v}{\partial n} \tag{5.7}$$

がなりたつからである．ここで $\partial/\partial s$ は境界 C の正の方向への接線微分なのに対し，$\partial/\partial n$ は外向きの正の法線微分を表わす．$\partial u/\partial s$ を閉曲線 C に沿って一周積分すれば 0 となるから，実関数 v に対するノイマン問題は

$$\oint_C \frac{\partial v}{\partial n}\,\mathrm{d}s=0 \tag{5.8}$$

が満たされないときには解くことはできない(演習問題 4 の 6, 7 参照)．多重連結領域に対しては，式(5.8)の周積分は外周だけでなく内周も含める必要があ

る：このときには，単一の閉曲線では必ずしも式(5.8)は成立する心要はないが，それは共役関数 u が多価のとき起こりうる．

コーシーの積分公式を応用して，ディリクレ問題の解をある特別の領域に対して表わすことができる．いまこの領域は円とし，半径が1で中心は原点とする．一般の半径への拡張は容易である．積分公式(5.3)で，$z=re^{i\phi}(r<1)$，$\zeta=e^{i\theta}$ とおく．$d\zeta=i\zeta d\theta$ であるから

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\zeta)\zeta}{\zeta-z}d\theta$$

を得る．点 z は単位円の内部にあるので，$1/\bar{z}=r^{-1}e^{i\phi}$ は外部の点である．したがって，次式がなりたつ($\bar{z}$ は z の複素共役)：

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\zeta)\zeta}{\zeta-1/\bar{z}}d\theta$$

両式の差および和をとると，$1/\zeta=\bar{\zeta}$ なので

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\zeta)\left(\frac{\zeta}{\zeta-z}\pm\frac{\bar{z}}{\bar{\zeta}-\bar{z}}\right)d\theta \tag{5.9}$$

が得られる．まず最初，正符号の方をとると

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\zeta)\frac{|\zeta|^2-|z|^2}{|\zeta-z|^2}d\theta \tag{5.10}$$

と書き直せる．$f(\zeta)$ にかかる因子は明らかに実数であるから，上式の実部をとると

$$\begin{aligned}u(r,\phi)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_C(\theta)\frac{1-r^2}{|e^{i\theta}-re^{i\phi}|^2}d\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_C(\theta)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\phi-\theta)+r^2}d\theta\end{aligned} \tag{5.11}$$

を得る．ここで $u_C(\theta)$ は調和関数 u の境界値である．これが単位円に関するディリクレ問題の解であり，最後の式は特に**ポアソンの公式**として知られている．

式(5.9)で負符号の方をとると，同じ $u_C(\theta)$ に関する共役関数 v が得られる．というのは

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\zeta)\frac{|\zeta|^2-2\zeta\bar{z}+|z|^2}{|\zeta-z|^2}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\left[1+i\frac{2\,\mathrm{Im}(z\bar{\zeta})}{|\zeta-z|^2}\right]\mathrm{d}\theta$$

となるから，その虚部をとると

$$v(r,\phi)=v(0)+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u_{\mathrm{C}}(\theta)\frac{r\sin(\phi-\theta)}{1-2r\cos(\phi-\theta)+r^2}\mathrm{d}\theta \qquad (5.12)$$

を得る．右辺第1項は式(5.4)で $z=0$ ($r=1$) として得られる．

最後に，上の u, v の式を結合すれば，$f(z)$ を $u_{\mathrm{C}}(\theta)$ で表わす式が得られる：

$$f(z)=i\,v(0)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_{\mathrm{C}}(\theta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\mathrm{d}\theta \qquad (5.13)$$

この結果は，単位円上で，正則関数の実部と虚部の両方を同時に任意に指定することができないことを示している．

式(5.11)の被積分関数の $u_{\mathrm{C}}(\theta)$ にかかる因子 $(1-r^2)/(1-2r\cos(\phi-\theta)+r^2)$ はポアソン核とよばれるが，それは

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\phi-\theta)+r^2}=\frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2}=\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right) \qquad (5.14)$$

とも書ける．単位円を含む領域である関数が調和なら，単位円上でその値が与えられれば，ポアソン核を使ってその内部の値が式(5.11)によって決定される．

5.4　テイラー展開

次に複素関数論におけるもう1つの重要な定理を示そう．

定理（テイラー展開）　関数 $f(z)$ はその正則領域D内の任意の点 a において，次の形のテイラー(Taylor)級数に展開される：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n(z-a)^n \qquad (5.15\,\mathrm{a})$$

$$A_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathrm{C}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta \qquad (5.15\,\mathrm{b})$$

ただし，Cは a を内部に含むD内の閉曲線で，積分は正の向きにとるものとする．

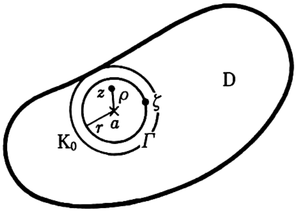


図 5.3

▶点 a を中心として，a に最も近い D の境界点を通る円を K_0，その半径を r_0，K_0 内の任意の点を z とする (図 5.3)．次に $|z-a|=\rho$ として，$\rho<r<r_0$ なる r を半径とする円 Γ を，中心を a としてとってそれを積分路とする．Γ 上に点 ζ をとると

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)}=\frac{1}{\zeta-a}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{\zeta-a}}$$

$$=\frac{1}{\zeta-a}\left[1+\frac{z-a}{\zeta-a}+\frac{(z-a)^2}{(\zeta-a)^2}+\cdots\cdot\right]$$

と展開できる．$|z-a|/|\zeta-a|=\rho/r<1$ だから，この級数は絶対収束する (z，ζ に関して上の条件を満たす限り収束は一様)．また

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}=\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}+\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^2}(z-a)+\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^3}(z-a)^2+\cdots\cdot$$

は Γ 上の ζ に関して一様に収束する．というのは，Γ 上で $|f(\zeta)|<M$，すなわち $|f(z)|$ が有界とすれば，十分大なる n をとれば

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(z-a)^k f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}\right|<\frac{M}{r}\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^k=\frac{M}{r}\frac{(\rho/r)^n}{1-\rho/r}\qquad\left(\frac{\rho}{r}<1\right)$$

は任意に選んだ正数 ε より小さくできるからである．ゆえに上の級数は項別に積分できる (次節の系 1(b) 参照)．全体を $2\pi i$ で割って，ζ について積分すると

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\qquad(5.16)$$

左辺は，コーシーの積分公式から $f(z)$ にほかならない．また関数

$f(\zeta)/(\zeta-a)^{n+1}$ は点 a を除いてD内で正則だから，4章の系3により，右辺の積分の径路は，円 Γ からの連続的変形によって a を内部に含むD内の任意の閉曲線Cに変形することができる．したがって定理に示したテイラー展開が得られる．　□

正則関数 $f(z)$ はこのようにテイラー級数に展開できる．この意味で，微分可能な関数は**解析的**(analytic)であり，解析関数(analytic function)ともいわれる．解析関数は何回でも微分可能である．すなわち無限回微分可能である．第 n 階の導関数については次の定理がある．

定理(グルサの公式)　領域Dにおいて $f(z)$ が正則ならば，Dにおいて各階の導関数が存在して，それらはDにおいて正則である．

▶$f(z)$ をテイラー展開(5.15 a)の形に表わして n 回微分し，$z=a$ とおくと

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}f(z)\bigg|_{z=a}\equiv f^{(n)}(a)=n!A_n$$

を得る．ここで a を z と書き直して，A_n の定義を使うと

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{\mathrm{C}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta \tag{5.17}$$

となる．Cは z を囲むD内の任意の正の閉曲線である．これは**グルサ**(Goursat)**の公式**といわれる．収束級数の導関数であるから，$f^{(n)}(z)$ はDにおいて正則である(§3.1の(2))．　□

すなわち，$f(z)$ が1回微分可能ならば何回でも微分可能であり，いずれの導関数も正則である．

これはコーシーの積分公式の導関数への拡張であるが，その積分公式(5.3)を z で微分することによっても上の式が得られる(微分と積分の順序が交換可能)．

例題1　対数関数が次の形にテイラー展開できることを示せ．

$$\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} \tag{5.18}$$

解　式(3.8)より $(\mathrm{d}/\mathrm{d}z)\ln z=z^{-1}$. これを $L_1(z)$ と定義すると，$L_1(z)$ は $z=0$ に特異点を有する．$L_1(z)$ のテイラー級数は $z=1$ のまわりで

$$L_1(z)=\sum B_n(z-1)^n,\quad B_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{1}{\zeta}\frac{1}{(\zeta-1)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

と表わせる．係数 B_n を決める閉曲線Cは $\zeta=0$ を内部に含まないようにとる．特にCとして，半径 $r(<1)$, 中心 $\zeta=1$ の円をとり，$\zeta=1+u$ とおくと $|u|<1$ だから

$$B_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{1}{1+u}\frac{\mathrm{d}u}{u^{n+1}}=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\oint_C u^{k-n-1}\mathrm{d}u=(-1)^n$$

最後の等式を得るのに§4.2の例2の結果を使った．したがって

$$\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n=1-(z-1)+(z-1)^2+\cdots\cdot \tag{5.19}$$

となる．この式を1回積分して，$\ln z|_{z=1}=0$ を使うと

$$\ln z=(z-1)-\frac{(z-1)^2}{2}+\frac{(z-1)^3}{3}+\cdots\cdot=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(z-1)^n}{n}$$

を得る．この式で z を $1+z$ でおき換えれば上式(5.18)となる．また，式(5.19)で同じ変換を行なえば式(2.11)を得る．　□

第3章で，領域Dで定義された連続関数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ に関し，(i) $f(z)$ がDで正則であることと，(ii) Dの各点で $u(x,y)$, $v(x,y)$ がコーシー・リーマンの微分方程式を満足することとは，同等であることを示した．本節ではさらに，(iii) $f(z)$ がDで解析的，すなわちテイラー級数(5.7)に展開できることも，(i)(ii)と同等であることが示された．演習問題でさらに，(iv) D内の閉曲線に関する $f(z)$ の積分が0であることが(i)と同等であること(モレラの定理)も示される．すなわち(i)-(iv)は互いに同等である．また解析関数の著しい特徴として，正則性は微分しても積分しても不変であることを指摘したい．

例題2　次の積分を求めよ．ただし，Cは $|z|=3$ で表わされる円とする．

$$I=\oint_C\frac{\sin\pi z^2+\cos\pi z^2}{(z-1)(z-2)}\mathrm{d}z$$

解　$\sin\pi z^2+\cos\pi z^2=g(z)$ とおく．$1/[(z-1)(z-2)]=1/(z-2)-1/(z-1)$ であるから

$$I=\oint_C \frac{g(z)}{z-2}\mathrm{d}z-\oint_C \frac{g(z)}{z-1}\mathrm{d}z$$

特異点 $z=1$ および 2 は円 $|z|=3$ の中にある．したがって，コーシーの積分公式(5.1)より $\oint g(z)\mathrm{d}z/(z-a)=2\pi i g(a)$ であるから

$$I=2\pi i\{g(2)-g(1)\}=2\pi i(\sin 4\pi+\cos 4\pi-\sin\pi-\cos\pi)$$
$$=4\pi i$$ □

例題 3　次の積分を求めよ．ただし C は円 $|z|=3$ とする．

$$I=\oint_C \frac{\mathrm{e}^{2z}}{(z+1)^4}\mathrm{d}z$$

解　グルサの公式(5.17)で $f(z)=\mathrm{e}^{2z}$，$n=3$ とすると

$$I=\oint_C \frac{\mathrm{e}^{2z}}{(z+1)^4}\mathrm{d}z=\frac{2\pi i}{3!}\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}z^3}\mathrm{d}^{2z}\bigg|_{z=-1}$$

（$z=-1$ は円 $|z|=3$ の内部にある）．ゆえに

$$I=\frac{8\pi i}{3}\mathrm{e}^{-2}$$ □

5.5　一様収束：正則性，微分，積分

定理　領域 D で正則な関数列 $f_n(z)$ が D で一様に関数 $f(z)$ に収束するとき

(a)　$f(z)=\lim_{n\to\infty}f_n(z)$ は D において正則である，

(b)　D における任意の曲線 C に関して $\int_C f(z)\mathrm{d}z=\lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)\mathrm{d}z$

(c)　$f'(z)=\lim_{n\to\infty}f_n'(z)$　　(5.20)

▶ (b)については§4.1の(vii)で示した．(a)については，D 内の任意の単連結領域 D_0 をとり，D_0 内の任意の閉曲線を C とする．このとき $\int_C f_n(z)\mathrm{d}z=0$ であるから，極限に移行しても一様収束だから，$\int_C f(z)\mathrm{d}z=0$．ゆえにモレラの定理によって $f(z)$ は D_0 で正則である．D_0 は任意であっ

たから(a)が得られる．次に(c)を示そう．D内の任意の点を z_0 とし，z_0 を囲む閉曲線をCとする．このとき，$f_n/(z-z_0)^2$ はC上において一様に収束するから，次の積分の等式

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz = \lim_{n\to\infty}\int_C \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^2}\,dz$$

がなりたつ．ゆえに，式(5.17)によって

$$f'(z_0) = \lim_{n\to\infty} f_n'(z_0)$$

である．z_0 はD内の任意の点であった．この収束性は点 z_0 によらないから一様収束である．□

この定理の(b)，(c)は次の形に書くことができる：

$$\int_C \lim_{n\to\infty} f_n(z)\,dz = \lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)\,dz \tag{5.21}$$

$$\frac{d}{dz}\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{d}{dz} f_n(z) \tag{5.22}$$

すなわち，一様収束の関数列 $\{f_n(z)\}$ に対しては，積分 $\int$ と極限 lim の両操作は交換することができるし，d/dz と lim についても交換ができることを示している．

正則関数列 $u_n(z)$ の無限級数についても，この定理から次の系1が導かれる．

系 1　領域Dにおいて $u_n(z)$ が正則で，$S_n(z)=\sum_{k=1}^{n} u_k(z)$ が一様収束ならば

(a) 極限の和 $S(z)=\sum_{k=1}^{\infty} u_n(z)$ はDで正則である，

(b) D内の任意の曲線Cに関して，$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ は項別に積分することができる：

$$\int_C S(z)\,dz = \sum_{k=1}^{\infty}\int_C u_k(z)\,dz \tag{5.23}$$

その結果生ずる級数も一様収束するから，項別積分は何回でもくり返せる．

(c) 級数は項別に微分可能である：

$$\frac{d}{dz} S(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{d}{dz} u_k(z) \tag{5.24}$$

項別微分も何回でもくり返せる．

この系の証明は，前の定理の $f_n(z)$ を部分和 $S_n(z)=\sum_{k=1}^{n} u_k(z)$ で書き換えれば，前と同様である．ただし，(b)では曲線Cの始点は固定し，終点 z を変数とした積分関数を考えるものとし，有限項では項別積分可能であることを使う．収束性は点 z によらないから一様収束である．(a)については，§2.3に類似の定理がある．

2つの複素変数 z，q のそれぞれの領域D，Qにおいて，$f(z,q)$ が z，q の関数として正則とする．Qに属する2点 α，β を結ぶ曲線 γ に関する積分

$$F(z)=\int_\gamma f(z,q)\,\mathrm{d}q=\int_\alpha^\beta f(z,q)\,\mathrm{d}q \tag{5.25}$$

は z の関数である．

系 2　(a)　$F(z)$ は領域Dで正則である．　(5.26)

(b)　Dに属する2点 a，ζ を結ぶ曲線をCとすると

$$\int_{\mathrm{C}} F(z)\,\mathrm{d}z=\int_\gamma \mathrm{d}q\int_{\mathrm{C}} f(z,g)\,\mathrm{d}z \quad \text{(積分順序の交換)} \tag{5.27}$$

(c)　$F'(z)$ は $\partial f/\partial z$ の積分に等しい：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F(z)=\int_\gamma \frac{\partial}{\partial z}f(z,q)\,\mathrm{d}q \quad \text{(積分と微分の交換)} \tag{5.28}$$

▶ (a), (b)は証明の方針の概略だけを述べることにする．まず曲線 γ を n 個の線分区間に分けて積分を n 項の和で近似する．その近似式 $F_n(z)$ の各項が正則な関数で表わされ，$n\to\infty$ においてその和が極限 $F(z)$ に一様に収束することが示せれば，系1の(a)から $F(z)$ の正則性がいえる．

系1の(b)より

$$\int_a^\zeta F(z)\,\mathrm{d}z=\lim_{n\to\infty}\int_a^\zeta F_n(z)\,\mathrm{d}z$$

右辺の n 項の和の積分は，各項の積分の和の形に書き直せる．このように和と積分の順序を交換した後で $n\to\infty$ の極限をとれば(系2(b))，積分順序の交換に関する式(5.27)を示すことができる．

(c)　$\partial f/\partial z$ は正則だから

$$G(z)=\int_\gamma \frac{\partial}{\partial z} f(z, q)\,\mathrm{d}q$$

も正則である．(b)と 4 章の系 2 より

$$\int_a^\zeta G(z)\,\mathrm{d}z=\int_\gamma \mathrm{d}q\int_a^\zeta \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z=\int_\gamma [f(\zeta, q)-f(a, q)]\,\mathrm{d}q$$
$$=F(\zeta)-F(a)$$

最初と最後の式を ζ で微分して，$\zeta=z$ とおくと

$$F'(z)=G(z)=\int_\gamma \frac{\partial}{\partial z} f(z, q)\,\mathrm{d}q$$

すなわち(c)が得られた．□

この系 2 は，積分の一様収束性があれば，D, Q を無限遠点を含む領域に拡張できる．

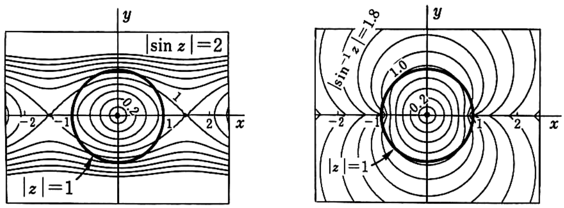
演習問題 5

1. コーシーの積分公式を使って，次の関数の単位円上($|z|=1$，正の向き)の積分を求めよ：

   (i) $\dfrac{\sin z}{2z+i}$,　　(ii) $\dfrac{\ln(z+2)}{z+2}$

2. 単位円板上($|z|\leqq 1$)で，次の関数の最大値はどこにあって，どんな値をとるか(図5.4)：

   (i) $|\sin z|$,　　(ii) $|\sin^{-1} z|$



(i) $|\sin z|$ の等高線　　(ii) $|\sin^{-1} z|$ の等高線

図 5.4

3. 次の関数に対し，指定された点 z_0 のまわりのベキ級数展開を求めよ：

   (i) $\dfrac{1}{1+z+z^2}$ $(z_0=0)$,　　(ii) $\tan^{-1} z$ $(z_0=1)$,

   (iii) $z^{\frac{1}{2}}$ $(z_0=i\pi)$

4. ベルヌーイ数 B_n(§ 2.5)を使って，次の展開式を証明せよ：

   (i) $\dfrac{z}{e^z-1}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n$

   (ii) $z\cot z=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}z^{2n}$

   (iii) $\tanh z=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!}B_{2n}z^{2n-1}$

5. 関数 $F(z)$ が単連結領域 D で連続で，D 内の任意の閉曲線 C に対し

   $$\oint_C F(z)\mathrm{d}z=0$$

   が常に満足されるとする．このとき，$F(z)$ は D で正則であることを証明せよ[モレラ(Morera)の定理]．

6. ベキ級数は，その収束円内では正則関数に収束することを 2 つの方法で証明せ

よ：

（i）本節の収束級数の定理を使って，（ii）モレラの定理を使って

7．正則関数の無限級数 $\sum_k u_k(z)$ が一様収束ならば，その極限関数は正則であることをモレラの定理を使って証明せよ．

8．もし $f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ の各項が

$$u_k(z)=\sum_{j=1}^{\infty} a_n{}^{(k)}(z-z_0)^n$$

の形をもち，また

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

と表わされるなら

$$a_n=\sum_{k=1}^{\infty} a_n{}^{(k)}$$

であることを示せ［ワイエルシュトラスの 2 重級数定理］．

9．関数 $f(z)$ は半径 R の円 C_R ($|z|=R$) の内部で正則で $f(0)=0$ を満たし，さらに円 C_R 上および内部で $|f(z)|\leqq M$ とする．このとき，円 C_R 内の任意の点で

$$|f(z)|\leqq\frac{M}{R}|z|$$

であることを証明せよ．もし等号が任意の内点 z でなりたつなら，至るところ

$$f(z)=\frac{M}{R}\mathrm{e}^{i\alpha}z \qquad (\alpha：実定数)$$

であることを示せ［シュワルツの補題］．

10．ポアソンの公式(5.11)を任意の半径 R の円の問題に拡張せよ．

11．実連続関数 $u(x,y)$ がもし領域 D 内の任意の円に対して平均値定理を満足するならば，関数 u は D で調和であることを証明せよ［ケーベ(Koebe)の定理］．

12．調和関数 $u(x,y)$ が原点中心，半径 R の円内で非負とする．このとき半径 $r(<R)$ の任意の同心円に対し，次のハルナック(Harnack)の不等式がなりたつことを示せ：

$$u(0)\frac{R-r}{R+r}\leqq u(r,\theta)\leqq u(0)\frac{R+r}{R-r}$$

13．ディリクレ問題は，与えられた境界値を満足する関数のうち，積分

$$\int_{\mathrm{D}}(u_x{}^2+u_y{}^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad (ディリクレ積分)$$

を最小にする関数 $u_0(x,y)$ を解とすることを証明せよ［ヒント：変分 $u_0+\varepsilon h(x,y)$ をとり，グリーンの恒等式(4.38)を応用してみよ］．

6. 孤立特異点と無限遠点

6.1 ローラン展開

関数 $f(z)$ が点 b を中心とする円の内部で正則ならば，その点のまわりでテイラー級数に展開できる．他方，$f(z)$ が円の外部で正則という場合もあろうし（§6.2 参照），2 つの同心円の間の円環領域で正則ということもある．ここでは特に，関数 $f(z)$ が定義域 D の中の一点 a を除いて正則でかつ一価という場合を考えてみよう．このような点は孤立特異点といわれる．例えば，$1/z^2$ および $\exp(1/z)$ は原点 $z=0$ が孤立特異点であるが，その性質は若干異なる．それを見るために，まず点 a のまわりで $f(z)$ の展開がどのような形になるかを考えることから始めよう．

定理（ローラン展開） 関数 $f(z)$ が領域 D 内の一点 a を除いて正則でかつ一価とする．このとき $f(z)$ は点 a のまわりで，次の形のローラン(Laurent)級数に展開される：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(z-a)^n \tag{6.1 a}$$

$$A_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta \tag{6.1 b}$$

ただし，C は a を内部に含む D 内の任意の正の向きの閉曲線である．

▶ D 内で a を中心とする 2 つの同心円 C_1，C_2 を描く（図 6.1）．$f(z)$ は外円 C_1，内円 C_2 に囲まれた円環 K および C_1，C_2 の円周上で正則である．円環 K 内に点 z をとって，それを中心とする K 内の円を Γ とすると，§4.2 の系 4 により

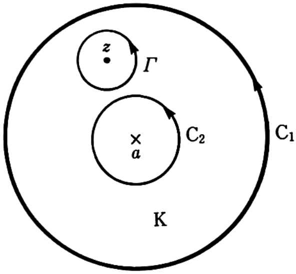


図 6.1

$$\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\oint_{\mathrm{C}_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta-\oint_{\mathrm{C}_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

ここで，Γ，C_1，C_2 はすべて正の向きにとっている．全体を $2\pi i$ で割ると，左辺は

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

を与える．右辺第 1 項の C_1 上の積分は，式(5.15)を得たのと同様にして，$(z-a)$ に関する次のベキ級数を与える：

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathrm{C}_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(z-a)^n \tag{6.2}$$

$$A_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathrm{C}_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta \quad (n=1,2,\cdots\cdot) \tag{6.3}$$

この級数は z が円 C_1 の中にあるときには収束する．他方，C_2 に関する積分では，z は円 C_2 の外にあるから，C_2 上の ζ に対し

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{-1}{z-a}\frac{1}{1-\dfrac{\zeta-a}{z-a}}=\frac{-1}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^n$$

と展開できる．$|\zeta-a|/|z-a|<1$ だから，これは C_2 上の ζ に関し一様絶対収束する．したがって，項別に積分して

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=1}^{\infty}A_{-n}(z-a)^{-n} \tag{6.4}$$

$$A_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathrm{C}_2}f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}\mathrm{d}\zeta \tag{6.5}$$

を得る．この級数は z が C_2 の外にあるとき収束する．このようにして，無限級数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}A_{-n}(z-a)^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n(z-a)^n \quad (6.6)$$

を得る．ただし，A_n は n の正負に従って式(6.3)または(6.5)で与えられる．いま孤立特異点 a のまわりで考えているから，内円 C_2 はいくらでも小さくとれる．したがって負べキ項の部分(6.4)は $z=a$ 以外のすべての z に対して収束する．

関数 $f(\zeta)/(\zeta-a)^{n+1}$ は円環Kで一価正則であるから，円 C_2 は連続的変形によって円 C_1 に一致させることができる．したがって，§4.2の系3により，式(6.5)の積分路 C_2 は C_1 とすることができる．さらに，円 C_1 は同様の変形によってD内の任意の閉曲線Cに変更することができる．このようにして，係数 A_n を定義する積分路は，n の正負に関係なく a を内部に含むD内の任意の閉曲線Cとすることができる．□

係数 A_{-1} は特異点 a での $f(z)$ の**留数**(residue)といわれる．というのは，a を囲むK内の任意の閉曲線Cに対して式(6.6)を積分すると，§4.2の例2より

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\mathrm{d}z=A_{-1} \quad (6.7)$$

となり，無数の係数の中で A_{-1} だけが残留するからである．その意味で $A_{-1}=\mathrm{Res}(a)$ と書く．同様に，$f(z)=\sum A_n(z-a)^n$ の両辺に $(z-a)^k$ をかけて，C上で積分すると

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)(z-a)^k\mathrm{d}z=A_{-k-1} \quad (6.8)$$

を得る．ゆえにローラン展開の各係数は一意的に確定する．式(6.7)の結果を一般化すると次の留数定理を得る．

定理(留数定理)　領域D内の閉曲線Cの内部で $f(z)$ が有限個(n 個)の孤立特異点 $z_1,\cdots,z_n$ 以外で正則ならば

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{Res}(z_i) \quad (6.9)$$

ただし Res(z_i) は特異点 z_i での留数を表わす(証明は，各特異点を囲む小円を $C_1, \cdots\cdot C_n$ とし，第4章の系4を適用する)．

［例1］ 半径2，原点中心の円をCとするとき

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z}{z^2+1}\,dz=1 \tag{6.10}$$

である．というのは

$$\frac{z}{z^2+1}=\frac{1}{2}\frac{1}{z-i}+\frac{1}{2}\frac{1}{z+i}$$

だから，被積分関数は $z=i$，$-i$ に特異点を有し，そこでの留数 Res(i)，Res$(-i)$ はいずれも 1/2 である．したがって式(6.9)の右辺は $1/2+1/2=1$ となる．

ローラン級数の正べキ項の部分

$$P(z)\equiv A_0+A_1(z-a)+A_2(z-a)^2+\cdots\cdot \tag{6.11}$$

は図6.1の C_1 の内部で収束する．また負べキ部分

$$N(z)\equiv\frac{A_{-1}}{z-a}+\frac{A_{-2}}{(z-a)^2}+\cdots\cdot \tag{6.12}$$

は C_2 の外部で収束する．よってローラン級数 $f(z)=P(z)+N(z)$ は C_1 と C_2 に囲まれた円環K内で収束する．

$f(z)$ ローラン展開の正べキ項の部分 $P(z)$ は正則部といわれるのに対し，負べキ項の部分 $N(z)$ は孤立特異点 a に関する $f(z)$ の**主要部**とよばれる．これに関して3つの場合が考えられる．

（I） 主要部なしの場合．このとき $f(z)$ は $z=a$ を除いて

$$f(z)=P(z)=A_0+A_1(z-a)+A_2(z-a)^2+\cdots\cdot \quad (z\neq a) \tag{6.13}$$

と表わせる．もし $f(a)=A_0$ と定義すれば，$f(z)$ の $z=a$ での特異性は除きうる．このようなとき，点 a は除きうる特異点といわれる．例えば

$$f(z)=\frac{\sin z}{z} \qquad (z\neq 0) \tag{6.14}$$

は，$f(0)=1$ と定義すれば，$z=0$ は $f(z)$ の正則点となり，$z=0$ は除きうる特異点である．もし $f(0)=c\neq 1$ と定義されているとすると，原点では f は正則でない．

（II）主要部が有限項の場合．

$$N(z)=\frac{A_{-k}}{(z-a)^k}+\cdots\cdots+\frac{A_{-1}}{z-a} \qquad (A_{-k}\neq 0,\ k\geqq 1) \tag{6.15}$$

このとき点 a は $f(z)$ の k 位の**極** (pole of order k) であるといわれ，k は極の多重度といわれる．もし $f(z)$ が a に k 位の極をもつなら，$(z-a)^kf(z)$ は点 a で解析的である．他方，関数 $g(z)$ が点 a で解析的で k 位の**零** (zero of order k) をもつというときには

$$g(z)=(z-a)^k\{B_k+B_{k+1}(z-a)+\cdots\cdots\} \quad (k\geqq 0) \tag{6.16}$$

と書ける（零の多重度は k である）．このとき $f(z)=1/g(z)$ は点 a に k 位の極をもつ．$f(z)$ が点 a に k 位の極をもつなら，点 a で正則なある関数 $h(z)$ を使って

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)^k}h(z) \tag{6.17}$$

と書ける．このとき，$z\to a$ で $f(z)\sim(z-a)^{-k}$ であり，任意の正数 M に対し，a の適当な近傍のすべての点 z に対し $|f(z)|>M$ となる．この性質は次の (III) とおおいに異なる．

点 $z=a$ が k 位の極のとき

$$(z-a)^kf(z)=A_{-k}+A_{-(k-1)}(z-a)+\cdots\cdots+A_{-1}(z-a)^{k-1}+\cdots\cdots$$

と書けるから，そこでの留数は

$$A_{-1}=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{k-1}[(z-a)^kf(z)] \tag{6.18}$$

で与えられる．特に，$k=1$ なら

$$A_{-1}=\lim_{z\to a}(z-a)f(z) \tag{6.19}$$

である．

［例 2］ $\dfrac{4}{z^2(z-2)}=-\dfrac{2}{z^2}-\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z-2}$

は $z=0$ に 2 位の極，$z=2$ に 1 位の極を有し，それぞれの極での留数は -1

および1である.

［例 3］　$f(z)=\dfrac{1}{z^2}\mathrm{e}^{-z}=\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}z+\cdots\cdot$　(6.20)

は原点に2位の極をもち，そこでの留数は式(6.18)より

$$\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z^2f(z)]=\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{e}^{-z}=-1$$

である．これは式(6.20)の展開式より明らかである．さらに原点を囲む任意の閉曲線Cに対し

$$\oint_{\mathrm{C}}\frac{1}{z^2}\mathrm{e}^{-z}\mathrm{d}z=-2\pi i \tag{6.21}$$

(III) 主要部が無限級数の場合.

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n(z-a)^n \tag{6.22}$$

と書けるとき，$z=a$ は**真性特異点**(essential singularity)といわれる．このときは次の定理がなりたつ.

定理(ワイエルシュトラスの定理)　点 a が真性特異点ならば，a に収束する点列 $\{z_n\}$ を適当にとれば，任意の数 c に対して $f(z_n)\to c$ ともなるし，また $f(z_n)\to\infty$ となる点列も選ぶことができる．すなわち $f(z)$ は一定の極限値を有しない.

▶これを背理法で証明しよう．関数 $f(z)$ は孤立した真性特異点 a を有するが，a の近傍で $f(z)$ が特定の複素数 c_0 には近づかないとする．そのとき $f(z)-c_0$ はこの近傍で0に近づくことはないから

$$g(z)=\frac{1}{f(z)-c_0}$$

は有界である．したがって，点 a はわるくても除去可能な特異点であり，$g(z)=b_0+b_1(z-a)+b_2(z-a)^2+\cdots\cdot$ と書ける．もし $b_0\neq 0$ なら，$z\to a$ のとき $f(z)\to c_0+1/b_0$ となって，$f(z)$ は a の近くで有界である．これは $f(z)$ の主要部が存在することと矛盾する．他方，もし $b_0=0$ のときには，$g(z)$ の最初のゼロでない係数を b_k とするとき

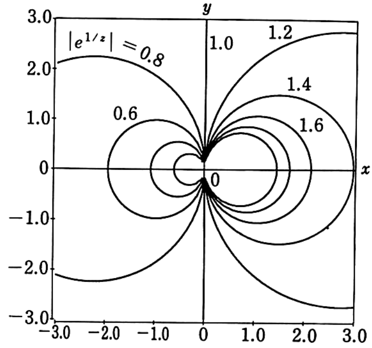


図 6.2　$|e^{1/z}|$ の等高線

$$f(z)=c_0+\frac{1}{(z-a)^k\{b_k+b_{k+1}(z-a)+\cdots\cdots\}}$$

となる．これは明らかに a が k 位の極であることを示し，やはり矛盾である．したがって，どんな（有限の）数 c に対しても $f(z_n)\to c$ となる点列が存在する．

$f(z_n)\to\infty$ となる点列が存在することも同様に示すことができるが，その証明は演習問題にゆずる．□

［例 4］　$e^{1/z}=1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2!z^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n!}\dfrac{1}{z^n}+\cdots\cdots$

は $z=0$ が真性特異点である．例えば，実軸上で $z=x\to+0$ のとき $e^{1/z}\to\infty$，また $z=x\to-0$ のとき $e^{1/z}\to 0$．一般に，複素定数 α に対し，点列 $z_n=1/(\alpha+2n\pi i)$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ は $n\to\infty$ のとき集積点 0 に収束する．この点列上で関数値は $\exp(1/z_n)=\exp(\alpha+2n\pi i)=\exp(\alpha)=\mathrm{const}$ となって定数値をとる（図 6.2）．

［例 5］　$\sin(1/z)$ は $z=0$ が真性特異点である．

6.2　無限遠点

円 $|z|=R$ の外部で正則な関数があり（R は正定数），無限遠 ∞ での関数 $f(z)$ のふるまいを知ろうとするときには，変数変換 $w=1/z$ によって，$z=\infty$ を w 面の原点 $w=0$ に写像して考えるのが便利である．w 面では $f(z)$ は $g(w)=f(1/w)$ に変換される．このとき，無限遠 ∞ での $f(z)$ のふるまいは原点 $w=0$

での $g(w)$ のふるまいによって定義される．点 $w=0$ には $z=\infty$ が対応することから，これを無限遠点とよぶ（無限遠 ∞ は単一の点ではないが）．したがって，$f(z)=z$ は無限遠点 ∞ で 1 位の極をもち，また $1/z^2$ は ∞ で解析的で，そこで 2 位の零をもつ．e^z は ∞ が真性特異点となる．

いま，領域 $|z|>R$ において $f(z)$ が一価正則であると仮定して，点 $z=0$ に関するローラン展開を考える．前節の定理の証明で用いた内円 C_2 はその半径を R よりも大きくとることにし，外円 C_1 の半径はさらに任意に大きくとることにする．そうすれば，$f(z)$ はやはり式 (6.1 a，b) のローラン展開で表わせる．このとき閉曲線 C は円 $|z|=R$ を内部に含む任意の閉曲線である．級数の正ベキ部分

$$A_1z+A_2z^2+\cdots\cdot \quad \left(=A_1\frac{1}{w}+A_2\frac{1}{w^2}+\cdots\cdot\right) \tag{6.23}$$

は無限遠点 ∞（w 面の原点）の主要部といわれる．前節の (I)，(II)，(III) に対応して，次の 3 つの場合が考えられる．

(I′)　主要部なしの場合．このとき $f(z)=a_0+a_{-1}z^{-1}+a_{-2}z^{-2}+\cdots\cdot=a_0+a_{-1}w+a_{-1}w^2+\cdots\cdot=g(w)$ なので，$f(z)$ は ∞ で解析的である．

(II′)　主要部が有限項の場合．このとき式 (6.23) は k 次の多項式 ($k\geqq1$) の形になり，$A_kz^k=A_kw^{-k}$ で切れるから，無限遠点 ∞ は k 位の極となり，関数 $f(z)/z^k$ は ∞ で解析的である．

(III′)　主要部が無限級数の場合．無限遠点 ∞ は $f(z)$ の真性特異点である．このとき，$z\to\infty$ で $f(z)$ は一定の極限をもたない．言い換えると，どのような円をとってもその外部で $f(z)$ は任意の複素数値に近づくことができる．

演習問題 6

1. 関数

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$

は点 $z=0$，1，2 に極をもつ．次の 3 つの同心円環

$$K_1: 0<|z|<1, \qquad K_2: 1<|z|<2, \qquad K_3: 2<|z|<\infty$$

のおのおのの領域で，ローラン級数に展開せよ．

2. 関数 $1/\sin z$ を $0<|z|<\pi$ の領域で z について展開せよ．

3. $1/\sin z^2$ は 2 位の極を 1 個だけ有することを示せ．

4. 関数

$$\sin^{-1} z=\frac{1}{i}\ln[iz+(1-z^2)^{\frac{1}{2}}]$$

において(式(2.41))，右辺[　]内の関数を 0 とする点 z はなく，また $z=\pm 1$ は分岐点である．このような性質を考慮して，$|z|>1$ の領域での原点に関するローラン展開の可能性について述べよ．また $|z|<1$ の領域ではどうか．

5. 2 つの関数 $f(z)$，$g(z)$ が点 a で正則で，かつ a が $g(z)$ の 1 位の零であるが，しかし $f(a)\neq 0$ のとき，関数 $F(z)=f(z)/g(z)$ の点 a での留数を求めよ．また，次の関数に対して指定された点での留数を決定せよ：

（i）$\dfrac{(1+z^2)f(z)}{(z-a)^m}$　(点 a；$a^2\neq -1$ で，m は正整数)

（ii）$\dfrac{z e^{ikz}}{z^2+d^2}$　(点 $z=\pm id$；d，k は正定数)

6. 関数 $f(\zeta)$ は $|\zeta|\leqq 1$ で正則とする．原点を正の向きに回る単位円上の積分について，次の結果を示せ：

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1}\frac{\overline{f(\zeta)}}{z\zeta-1}\,d\zeta=\begin{cases} -\overline{f'(0)} & (z=0) \\ \dfrac{1}{z}\left(\overline{f(0)}-\overline{f(\bar{z})}\right) & (0<|z|<1) \\ \dfrac{1}{z}\overline{f(0)} & (|z|>1) \end{cases}$$

7. $f(z)$ の孤立した真性特異点 a の近傍において，a に収束する点列 $\{z_n\}$ のなかに $f(z_n)\to\infty$ となる点列が存在することを示せ．

8. パラメータ t を z の関数

$$F(z,t)=\exp\left\{\frac{t}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right\}$$

を $z=0$ のまわりにローラン展開すると

$$J_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}J_n(t)\{z^n+(-z)^{-n}\}$$

と表現されることを示せ．ただし

$$J_n(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(n\theta-t\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

は n 次ベッセル関数である（$F(z,t)$ はベッセル関数の母関数とよばれる；第 13 章参照）．

9．関数 $f(z)$ が円環領域 $r_1\leqq z\leqq r_3$ で解析的で一価とする．半径 r_2 の円 $|z|=r_2$ は条件 $r_1<r_2<r_3$ を満たすとする．円 $|z|=r_k$ 上の $|f(z)|$ の最大値を $M(r_k)$ で表わす（$k=1$，2，3）．このとき，次のアダマール（Hadamard）の三円定理を証明せよ：

$$\ln M(r_2)\leqq\frac{\ln r_3-\ln r_2}{\ln r_3-\ln r_1}\ln M(r_1)+\frac{\ln r_2-\ln r_1}{\ln r_3-\ln r_1}\ln M(r_3)$$

（この意味で，$\ln M(r)$ は $\ln r$ の凸関数である）［ヒント：正実数 α に対し，$g(z)=z^{-\alpha}f(z)$ を定義し，$|g(z)|$ が 2 つの円 $|z|=r_1$，$|z|=r_3$ 上で同時に同じ最大値をとるように α を選び，最大値定理を適用してみよ］．

7. 整関数と有理形関数

7.1 整 関 数

関数 $f(z)$ が無限遠点 $z=\infty$ を除くすべての点で正則なとき，$f(z)$ を**整関数**(entire function，integral function)という．関数 $f(z)$ が整関数ならば，$z=0$ に関するテイラー展開 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ はすべての(有限な)z に対して収束する．このとき，§6.1 で述べた $f(z)$ の主要部は恒等的に消える：$N(z)\equiv 0$．指数関数 e^z あるいは $z+2z^3$ などは整関数の例である．無限遠点に関していえばそこが特異点で，§6.2 の(II′)に対応する整関数は，z に関する多項式

$$f(z)=A_0+A_1 z+\cdots\cdots+A_k z^k$$

で，これは有理整関数とよばれる．すなわち無限遠点 ∞ だけが特異点で k 位の極である．(III′)に対応するのは，次の無限級数である：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$$

z 面でみれば，これは収束半径が ∞ で，$z=\infty$ は真性特異点である．このような整関数は**超越整関数**とよばれる．e^z，$\sin z$，$\cos z$ などは超越整関数である．

整関数に関するリウヴィル(Liouville)の定理を証明する前に，まず有名な不等式を示そう．§5.4 で導関数に関するグルサの公式(5.17)を導いたが，その式で点 z を中心とする半径 r の円を C_r とすると($\zeta=z+re^{i\theta}$ とおいて)

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(z+re^{i\theta})}{r^n e^{in\theta}}\,d\theta$$

となる．円 C_r 上で $|f(\zeta)|$ が有界で，その最大値が $M(r)$ で与えられるなら

$$|f^{(n)}(z)|\leqq\frac{n!}{2\pi}\frac{M(r)}{r^n}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{n!}{r^n}M(r) \tag{7.1}$$

を得る．これは**コーシーの不等式**といわれる．

整関数 $f(z)$ が，ある正定数 M に対してすべての z で $|f(z)|<M$ が満たされ

るとき，有界といわれる．

> **定理**（リウヴィルの定理）　整関数 $f(z)$ が有界ならば，$f(z)$ は定数である．

▶式(7.1)で $n=1$，$M(r)=M$ とすると，$|f'(z)|<M/r$ である．r はいくらでも大きい値をとれるから，$f'(z)=0$ を得る．ゆえに $f(z)$ は定数である．□

この結果，無限遠点 ∞ をも含めて $f(z)$ がすべての z で正則ならば，$f(z)$ は定数でなければならない．

7.2　有理形関数

すべての有限点で正則な関数が整関数であったが，有限個あるいは無限個の極の特異点を除けば一価正則な関数は**有理形**(meromorphic)とよばれる．いま $f(z)$ が，無限遠点も含めて，特異点が極のみで，その位置が $z_1, \cdots\cdot, z_n$，多重度がそれぞれ $k_1, \cdots\cdot, k_n$ であるとき，関数

$$g(z)=f(z)(z-z_1)^{k_1}\cdots\cdot(z-z_n)^{k_n}$$

を考えよう．このように定義された $g(z)$ は有限の z では解析的であり，無限遠点はたかだか極なので，$g(z)$ は多項式である．したがって，関数 $f(z)$ は 2 つの多項式の商，すなわち**有理関数**である：

$$f(z)=\frac{a_0+a_1z+\cdots\cdot+a_nz^m}{b_0+b_1z+\cdots\cdot+b_nz^n} \tag{7.2}$$

他方，無限遠点を除く全平面で有理形であるが，有理関数とは異なる関数は**超越有理形関数**といわれる．このとき特異点の数は有限個とは限らない．

点 a が $f(z)$ の m 位の零点とするとき，その点の近傍で

$$f(z)=(z-a)^m g(z)$$

と書ける．ただし関数 $g(z)$ は正則で $g(a)\neq 0$ とする．$(\mathrm{d}/\mathrm{d}z)\ln f(z)$ は公式(4.34)，(3.9)を用いると，直ちに

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{m}{z-a}+\frac{g'(z)}{g(z)} \tag{7.3}$$

となる．定義から $g'(z)/g(z)$ は $z=a$ で正則であるから，$f'(z)/f(z)$ は $z=a$ に 1 位の極をもち，そこでの留数は零点の多重度 m に等しい．

一方，点 a が $f(z)$ の n 位の極のときには，a の近傍で $f(z)=(z-a)^{-n}g(z)$ と書け，$(\mathrm{d}/\mathrm{d}z)\ln f(z)$ をつくると

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{-n}{z-a}+\frac{g'(z)}{g(z)} \tag{7.4}$$

を得る．$z=a$ はこのときも $f'(z)/f(z)$ の1位の極であるが，留数は $-n$ である（n は極の多重度）．

単連結領域Dにおいて，$f(z)$ が有理形で，D内の単純閉曲線Cが $f(z)$ の零および極の上を通らないものとする．上の式(7.3)，(7.4)を用いると，次の式が直ちに得られる：

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathrm{C}}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=\sum_i m_i-\sum_j n_j=M-N \tag{7.5}$$

ただし，m_i，n_j はそれぞれC内の $f(z)$ の第 i 番目の零の多重度，第 j 番目の極の多重度であり，また $M=\sum_i m_i$ はC内の各零点の多重度まで数えた零点数であり，$N=\sum_j n_j$ はC内の各極点の多重度まで数えた極数である．

左辺の被積分関数は $(\mathrm{d}/\mathrm{d}z)\ln f(z)$ と書ける．さらに

$$\ln f(z)=\ln|f(z)|+i\arg f(z) \tag{7.6}$$

を考慮すると，閉曲線Cについての積分の結果，式(7.5)は

$$[\arg f(z)]_{\mathrm{C}}=2\pi(M-N) \tag{7.7}$$

となる．ここで $[\arg f(z)]_{\mathrm{C}}$ はCを一周したときの $\arg f(z)$ の増加を意味する．上式によれば一周後の $\arg f(z)$ の変化は 2π の整数倍であり，これは $f(z)$ が有理形（極を除いて一価正則）であることと矛盾しない．特に関数 $f(z)$ がC内で解析的であるときには，多重度を含めた零の個数 M は

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=M \tag{7.8}$$

で与えられる．

定理（ルーシェ（Rouché）の定理）　2つの関数 $f(z)$，$g(z)$ が単純閉曲線C上およびC内で正則で，C上で $|g(z)|<|f(z)|$ とすると，$f(z)$ および $f(z)+g(z)$ はC内で同数の零を有する．

▶$f(z)$ も $f(z)+g(z)$ も C 上で零とならないことは明らかである．このとき

$$\ln\{f(z)+g(z)\}=\ln f(z)+\ln\left\{1+\frac{g(z)}{f(z)}\right\} \tag{7.9}$$

と表わせる．$w=1+g(z)/f(z)$ によって変数 w を定義する．w 面で考えると，z が C 上を動くとき，$1+g(z)/f(z)$ は中心 $w=1$，半径 1 の円 $|w-1|=1$ の内部にある．したがって，$\arg w$ は元の値にもどる．ゆえに式(7.7)で $N=0$ とし，式(7.9)を用いると

$$[\arg\{f(z)+g(z)\}]_{\mathrm{C}}=[\arg f(z)]_{\mathrm{C}}=2\pi M \qquad \square$$

この定理は，「2 つの方程式

$$f(z)=0, \qquad f(z)+g(z)=0$$

は同数の根を有する」という表現にすることもできる．

定理(代数学の基本定理)　n 次多項式はすべて n 個の零を有する．

▶$f(z)=z^n$ は原点 $z=0$ に n 重の零がある．一般の n 次多項式を

$$p_n(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots\cdots+a_1z+a_0$$

とする $(a_n\neq 0)$．いま $f(z)=a_nz^n$，$g(z)=a_{n-1}z^{n-1}+\cdots\cdots+a_1z+a_0$ とおき，ルーシェの定理の閉曲線 C を原点中心，半径 $R(>1)$ の円とする．C 上で $|f(z)|=|a_n|R^n$

$$|g(z)|\leqq|a_{n-1}|R^{n-1}+\cdots\cdots+|a_1|R+|a_0|\leqq(|a_{n-1}|+\cdots\cdots+|a_1|+|a_0|)R^{n-1}$$

それゆえ，もし $R>(|a_{n-1}|+\cdots\cdots+|a_1|+|a_0|)/|a_n|$ なら，円 C がどんなに大きくても常に $|f(z)|>|g(z)|$ である．それゆえ，ルーシェの定理により $f(z)+g(z)$ は n 個の零を有する．　$\square$

例題 1　　$p(z)=z^4+z^3+4z^2+2z+3=0$

の 4 根はどの象限にあるか．

解　(i) $p(z)=0$ の根は実数ではない．というのは，$x\geqq 0$ とすると $p(x)>0$ である．また $\xi>0$ に対して，$x=-\xi$ とおくと

$$p(-\xi)=(\xi^4+3\xi^2+1)+\xi^2(1-\xi)+2(1-\xi)$$
$$=\xi^3(\xi-1)+2\xi(\xi-1)+2\xi^2+3$$

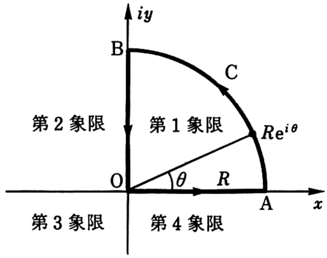


図 7.1

$\xi>1$ のときは右辺の各項は正，$0<\xi\leqq 1$ のときは中辺の各項はいずれも正か非負で，$p(-\xi)>0$ となるからである．また根は純虚数でもない．というのは $z=iy$ とおくと

$$p(iy)=y^4-4y^2+3+i(-y^3+2y)=0$$

を満たす実数 y はないからである．

（ii）根は第 1 象限にはない．なぜなら，十分大なる R に対し，図 7.1 の閉曲線 C を考える．実軸上 $x\in[0,R]$ では $p(x)$ は正で，その偏角 $\arg p(x)$ を 0 とする．第 1 象限の 4 半円 AB 上では，$z=Re^{i\theta}$ とすると

$$p(z)=R^4e^{i4\theta}\left(1+\frac{1}{R}e^{-i\theta}+0\left(\frac{1}{R^2}\right)\right)$$

だから，$\arg p(z)=4\theta+O(R^{-1})$．虚軸に達すると $\arg p(z)=2\pi+O(R^{-1})$．虚軸上 $z=iy\,(y\in[0,R])$ では

$$\arg p(z)=\tan^{-1}g(y),\quad g(y)=\frac{-y^3+2y}{y^4-4y^2+3}$$

と表わせて，表 7.1 のように $\arg p(z)$ は与えられる．したがって，閉曲線 C を OA，AB，BO のように一周したときの $p(z)$ の偏角の変化は，十分大きな R に対し $[\arg p(z)]_C=0+2\pi+(-2\pi)=0$ となり，式(7.7)，(7.8)を応用すれば C 内に根はない．

表 7-1

y	$+\infty$		$\sqrt{3}$		$\sqrt{2}$		1		0
$g(y)$	0	$-$	∞	$+$	0	$-$	∞	$+$	0
$\tan^{-1}g(y)$	2π		$3\pi/2$		π		$\pi/2$		0

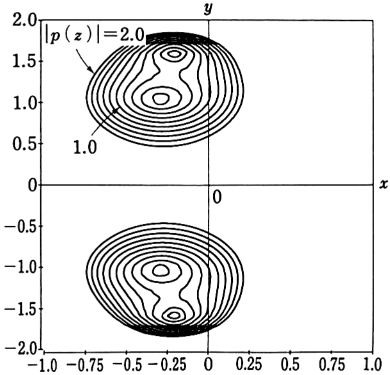


図 7.2　$p(z)\equiv z^4+z^3+4z^2+2z+3$ の絶対値の等高線
（小円の中心が $p(z)=0$ の根に相当する $(z=x+iy)$．4 つの根は
$z=-0.29178\pm1.03258i$，$z=-0.20822\pm1.60071i$.）

(iii) $p(z)$ の係数はみな実数であるから，z_0 が根ならその複素共役 $\bar{z}_0$ も根である．したがって $p(z)=0$ の根は，第 2，第 3 象限に 2 個ずつある（図 7.2）．　□

7.3　零点および零点列

関数 $f(z)$ の零点とは $f(z)=0$ を満たす点 z のことである．もし $f(z)$ が点 a の近傍で解析的なら，そこで

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n \tag{7.10}$$

と表わすことができるが，その点 a が零点なら，少なくとも c_0 は消える．もし k 位の零なら $(k\geqq1)$，$c_k\neq0$ で $n<k$ なるすべての n に対し $c_n=0$ である．零点の位数はかならず整数であり，解析関数はその解析的領域においては非整数位の零をもつことはない．k 位の零点 a においては

$$f(a)=f'(a)=\cdots\cdots=f^{(k-1)}(a)=0$$

である．これは上のテイラー級数の形から明らかである．重要なことは，解析関数の零点は孤立していることである．それを示す前に，まず次の定理を証明しよう．

定理　ベキ級数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ が半径 R の円 $C(|z|=R)$ の内部で収束す

るものとし，C 内の点列 $z_1, z_2, \cdots\cdots$ は内点 z_0 に集積する無限点列とする．もしどの点 z_n においても $f(z_n)=0$ ならば，C のすべての点で $f(z)=0$ である．

▶もし 1 つでも 0 でない係数 c_n があれば定理の条件を満たすことはできないことを示そう．集積点 z_0 を原点にとっても一般性を失うことはないであろう．

最初の 0 でない係数を c_k とすると

$$f(z)=z^k(c_k+c_{k+1}z+\cdots\cdots),\quad |z|<R,\quad c_k\neq 0$$

と書くことができる．$0<\rho<R$ なる数 ρ を任意に選ぶと $z=\rho$ に対し級数は収束する．ゆえに，級数のどの項も有界なので，任意の n に対し $|c_n|\rho^n\leqq K$ である．このとき次の不等式を得る：

$$|f(z)|\geqq|z|^k\left\{|c_k|-\frac{K|z|}{\rho^{k+1}}-\frac{K|z|^2}{\rho^{k+2}}-\cdots\cdots\right\}$$

$$=|z|^k\left\{|c^k|-\frac{K|z|}{\rho^k(\rho-|z|)}\right\},\quad (|z|<\rho)$$

右辺は $|z|$ が十分小さいとき，点 $z=0$ を除けば正である．これは集積点 $z=0$ にいくらでも近い点 $z_n(n\to\infty)$ で $f(z)$ が 0 となるという前提に反する．それゆえ，すべての係数が 0 とならねばならない．ゆえに級数の収束円の内部で $f(z)\equiv 0$ である．　□

もし関数 $f(z)$ が $z=a$ を含む領域で解析的なら，そこでテイラー級数に展開できる．$f(z)$ は恒等的には 0 でないとすると，$f(z)$ のテイラー級数は 0 でない係数が少なくとも 1 つある．ゆえに上の定理の証明からわかるように，$f(z)$ は $z=a$ を中心とする十分小さい円内では，$z=a$ を除いて零点を有しない．このことから，解析関数の零点は孤立していることがわかる．

上の定理から次の系が得られる．

系 1　もし $f(z)$ が円 C 内で解析的で，その任意の部分領域のすべての点で 0 となるか，あるいは C 内の連続曲線の任意の弧に沿って 0 となるなら，$f(z)$ は C 内で恒等的に 0 とならねばならない．

系 2　(ベキ級数の一致の定理)　2 つの関数 $f(z)$，$g(z)$ が円 C の内部 D で解

析的で，集積点を有するC内の無限点列上で同じ値をもつなら，それらはDのすべての点 z で恒等的に等しくなければならない：$f(z)\equiv g(z)$, $z\in$ D.

7.4 逆関数のベキ級数展開

正則関数 $w=f(z)$ に対し，その逆関数 $z=g(w)$ のベキ級数展開を与えるものがラグランジュの公式である．この公式は以下のように導かれる．$w=w_0$ の近傍における逆関数を $z=z_0+\sum_{n-1}^{\infty}b_n(w-w_0)^n$ とおく．コーシーの積分公式(5.3)で，$z\to w$, $\zeta\to f(\zeta)$, $f(\zeta)\to\zeta$, $f(z)\to z=g(w)$ とすると，w_0 に十分近い点 w について

$$g(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}}\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)-w}\mathrm{d}\zeta \tag{7.11}$$

(Cは $f(\zeta)=w$ となる点を囲み，逆関数の定義域に含まれる閉曲線)がなりたつ．この式を w で微分して部分積分を行ない，さらに級数展開すると[($|w-w_0|/|f-w_0|$)<1 として]

$$g'(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}}\frac{\mathrm{d}\zeta}{f(\zeta)-w}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}}\frac{d\zeta}{[f(\zeta)-w_0]^n}(w-w_0)^{n-1}\right)$$

となる．$g'(w)=\sum_{n=1}^{\infty}nb_n(w-w_0)^{n-1}$ に注意すると

$$nb_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}}\frac{\mathrm{d}\zeta}{[f(\zeta)-w_0]^n}=\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}\zeta^{n-1}}\left\{\frac{(\zeta-z_0)^n}{[f(\zeta)-w_0]^n}\right\}\right)_{\zeta=z_0} \tag{7.12}$$

を得る．これが求める公式である．

演習問題 7

1. 有理形関数 $f(z)$ の零点および極点に関する式 (7.5) を証明せよ．
2. 関数 $f(z)$ は閉曲線 C の内部で有限個の零および極をもち，関数 $h(z)$ は C 上および内部で解析的とする．このとき，式 (7.5) に対応して
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C h(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z$$
はどのように表わせるか．
3. $w=z\mathrm{e}^{az}$ （a は定数 $\neq 0$） の逆関数として定義される $z=g(w)$ の $w=0$ のまわりのテイラー展開を
$$z=\sum_{n=0}^{\infty}a_n w^n$$
と書くとき，係数 a_n を決定し，収束半径を示せ．
4. 有理関数 $g(z)$ は実軸の正の部分に極をもたず，さらに $z\to 0$ および $z\to\infty$ のとき $z^{\alpha}g(z)\to 0$ とする（α は非整数の実数とする）．このとき
$$\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}g(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\sum_n r_n$$
がなりたつことを示せ．ただし右辺の和は $(-z)^{\alpha-1}g(z)$ のすべての極における留数 (r_n) の和である．
5. 関数 $f(z)$ はなめらかな閉曲線 C の内部で解析的で，定数ではないが，C 上で $|f(z)|=\mathrm{const}$ とする．このとき，$f(z)$ は C の内部で少なくとも 1 つの零を有することを証明せよ．また，$f(z)$ がこのような C の内部で n 個の零をもつなら，$f'(z)$ は C の内部で $(n-1)$ 個の零を有するといってよいか．
6. 代数学の基本定理を帰謬法により証明せよ．

8. 解析接続

解析関数(正則関数)は，多項式，無限級数，有理形関数，積分などによって表現されるが，それらはふつう限られた定義領域をもつ．それ以外の領域では，式が意味をなさなくなることがあるからである．しかし以下の例からもわかるように，多くの場合，解析関数の定義域を拡張することができる．すなわち，最初に与えられた領域である関数と一致して，さらにより大きな領域で解析的である関数を定義することができる．そのような意味における解析的延長，あるいは解析接続(analytic continuation)についてここで考察しよう．

8.1 解析接続

簡単な例から始めよう．次の無限級数 $g_1(z)$

$$g_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n=1-z+z^2-z^3+\cdots \tag{8.1}$$

は $|z|<1$ で絶対収束し，$|z|>1$ では発散する．したがって，これは単位円内 $|z|<1$ で解析的な関数を表わす．次の関数

$$g_2(z)=\frac{1}{1+z} \tag{8.2}$$

は，点 $z=-1$ を除く全平面で解析的である．しかも $g_2(z)$ は単位円内 $|z|<1$ では，原点に関してテイラー展開してみればすぐわかるように，$g_1(z)$ と一致している．第 3 の関数

$$g_3(z)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t(1+z)}\mathrm{d}t \tag{8.3}$$

については，定義域は $\mathrm{Re}\,z>-1$ である．というのは，右辺の積分がそのときに収束するからである．実際，$\mathrm{Re}\,z=x$ とおくと

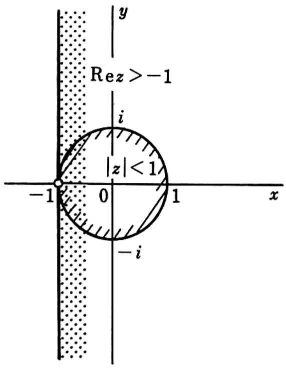


図 8.1

$$|g_3(z)| \leqq \int_0^\infty e^{-t(1+x)}\,dt = \frac{1}{1+x} \quad (x>-1)$$

となるからである．したがって，そこで t について積分すれば

$$g_3(z) = \left[-\frac{e^{-t(1+z)}}{1+z} \right]_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{1+z} \quad (\mathrm{Re}\, z > -1)$$

となって，領域 $\mathrm{Re}\, z>-1$ において $g_2(z)$ と一致し，$|z|<1$ では $g_1(z)$ と一致している．$g_1(z)$ と一致することについては，$g_3(z)$ の $z=0$ での導関数を調べることでも示せる．すなわち，$(d/dz)^n g_3(z)|_{z=0} = (-1)^n n!$ となるので $g_1(z)$ と一致することがわかる．

このような意味で，$g_3(z)$ は解析関数 $g_1(z)$ のより大きな領域 $\mathrm{Re}\, z>-1$ への延長と考えることができる．また，$g_1(z)$，$g_3(z)$ の $z=-1$ を除く全平面への延長が $g_2(z)$ とみなすことができる (図 8.1)．単位円内では，$g_1(z)$，$g_2(z)$，$g_3(z)$ は同じ 1 つの関数を表わしていることから，$g_2(z)$，$g_3(z)$ は $g_1(z)$ の**解析接続**といわれる．

一般的な解析接続の方法は，関数をまずベキ級数で表わし，その収束円を鎖状 (チェーン) につなげる方法がとられる．いま，関数 $f(z)$ がある領域 D で解析的とする．D の境界に近い点 z_1 を選び，$f(z)$ を z_1 のまわりでテイラー展開する．この級数 $p_1(z-z_1)$ は，z_1 を中心とする D に含まれる最大の円 C_0 の内部で収束し，$f(z)$ を表わす．しかしながら，同じ z_1 を中心とするもっと大きな円 C_1 内でも，同じテイラー級数が収束することがありうる (図 8.2)．このときテイラー級数 $p_1(z-z_1)$ は C_1 の内部で解析関数を表わし，C_0 の内部で $f(z)$ と一

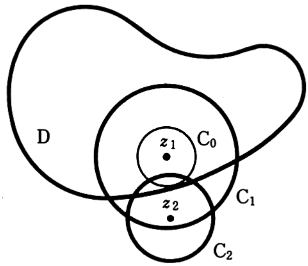


図 8.2

致しているので，$f(z)$ は D と C_1 を合併させた領域 D_1 に延長されたことになる．これをやはり $f(z)$ で表わすことにする．さらに C_1 の内部に点 z_2 をとり，z_2 におけるテイラー展開 $P_2(z-z_2)$ をつくる．もしその収束円 C_2 が D_1 の外へ出るなら，$f(z)$ は D_1 と C_2 を合併した領域 D_2 へ延長される．これをくり返すことができれば，より広い領域への延長が次々と可能となる．このように，収束円の鎖をつなげて解析接続する方法は円鎖法(circle-chain method)とよぶ．このようにして得られる拡張された関数 $f(z)$ は一意的であろうか．次の定理がその解答を与える．

定理(一致の定理)　2 つの関数 $f_1(z)$ と $f_2(z)$ が共通の領域 D でいずれも解析的であるとする．さらに D のある部分 D′(⊂D) で $f_1(z)$ と $f_2(z)$ は一致するとしよう．D′ は D の部分領域でも，曲線の一部でも，また集積点を有する無限点列でもよい．このとき $f_1(z)$ と $f_2(z)$ は D のすべての点で一致する．

▶D′ の任意の z_0 を中心として D に含まれる最大の円 C を書く (D′ がもし集積する点集合のときには，z_0 はその集積点にとる)．$f_1(z)$ と $f_2(z)$ のいずれも z_0 のまわりでテイラー級数で表わせて，円 C 内で収束する．この 2 つの級数は D′ のすべての点で同じ値をとるから，ベキ級数の一致の定理(§ 7.3 の系 2)から，2 つの級数は C 内で一致する．このため関数 $f_1(z)$ と $f_2(z)$ は C 内で一致する．次に C の内部で境界に近い点 z_1 を選び，上の手順をくり返す．この収束円の鎖をつくる操作で，D のすべてがおおわれるであろう．それゆえ D 内で $f_1(z)\equiv f_2(z)$．　□

この一致の定理の最も重要な帰結は，解析接続が局所的に一意であるという

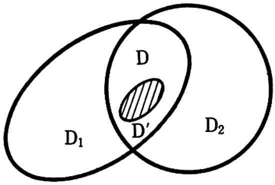


図 8.3

ことである．すなわち，$f_1(z)$ がある領域 D_1 で解析的であるとする．また D_2 は D_1 と共通の領域 D をもつとする(図 8.3)．このとき，もし D_2 で解析的で，しかも D で $f_1(z)$ と一致する関数 $f_2(z)$ があったとすると(f_1 と f_2 は，上の定理で定義した D 内の部分 D′ で一致すればよい)，上の一致の定理から，$f_2(z)$ は一意であることが導かれる．また収束円をつないで得られた延長であるという点で局所的である．

いま，D_1-D では $f(z)=f_1(z)$，D_2-D では $f(z)=f_2(z)$，共通領域 D で $f(z)=f_1(z)=f_2(z)$ によって関数 $f(z)$ を定義すれば，$f(z)$ は D_1 と D_2 の合併領域 D_{12} で解析的である．このようにして，D における $f(z)$ の D_{12} への一意的な解析接続が与えられる．この解析接続は決して人為的なものではなく，解析関数の性質に根づく本質的な延長となっている．

解析関数は局所的な正則性(微分可能性)によって定義されている．そのとき関数の一意性が仮定されていた．しかしながら，解析接続を継続していくと，関数の一意性が失われることも可能である．例えば，$f(z)$ が点 z_1 を含む領域から z_2 を含む領域へ，2 つの別の路すじに沿って解析接続されたとする(図 8.4)．それぞれの領域を D，D′ とする．もし D，D′ の共通部分(斜線部)に連結性がない場合には，z_2 において別の路すじで延長した関数の値が異なることがありうる．このような意味で，解析関数の多価性は解析接続の局所一意性と矛盾なく，密接に結びついている．

円鎖法による解析接続では，関数は最初の定義域をはみ出して，より大きい

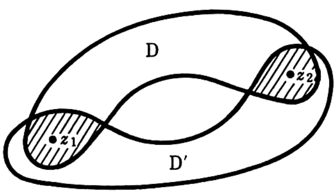


図 8.4

領域へ拡張される．しかしこれが常に可能というわけではなく，解析接続できない境界もある．そのような境界は自然境界(natural boundary)といわれる．

［例 1］ 単位円を自然境界とする関数．

$$f(z)=z+z^2+z^4+\cdots\cdots+z^{2n}+\cdots\cdots$$

は収束半径が 1 で，しかも点 $z=1$ で明らかに $f(z)$ は発散する．ところが

$$f(z)=z+f(z^2),\quad 一般に\quad f(z)=z+\cdots\cdots+z^{2n-1}+f(z^{2n})$$

なる関係があるから，$z^2=1$ でも発散し，一般に $z^{2n}=1$ で発散する．そのような点は

$$z_{n,m}=\exp\left(i\frac{2\pi m}{2^n}\right)\quad\begin{pmatrix}m=1,2,\cdots\cdots,2^n\\ n=0,1,2,\cdots\cdots\end{pmatrix}$$

で表わされ，単位円 $|z|=1$ 上に無限に多く，稠密に分布している．

8.2 鏡像の原理(principle of reflection)

> 2 つの領域 D_1，D_2 が互いに接して存在し，その共通の境界の曲線を C とする．関数 $f_1(z)$ は D_1 で正則，関数 $f_2(z)$ は D_2 で正則とし，両関数は C まで連続とし，C 上で $f_1(z)=f_2(z)$ がなりたつとする．そのとき，$f_1(z)$ と $f_2(z)$ は結合した領域 $D_*=D_1\cup D_2\cup C$ で正則である．

▶D_1，D_2 を合成した領域 D_* で合成関数 $f_*(z)$ を定義する：

$$f_*(z)=\begin{cases}f_1(z), & z\in D_1\\ f_2(z), & z\in D_2\end{cases}$$

次に D_* の閉曲線 C_* をとり，$f_*(z)$ をC_* に沿って積分すると

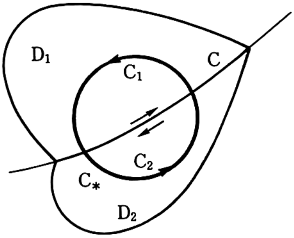


図 8.5

$$\oint_{C_*} f_*(z)dz = \oint_{C_1} f_1(z)dz + \oint_{C_2} f_2(z)dz = 0$$

ここで，C_1 は曲線 C_* の D_1 内の部分と一致し，さらに境界 C に沿う曲線 L を加えて閉曲線としたもので，C_2 も同様の D_2 内の閉曲線である．L に沿う積分は C_1 と C_2 で打ち消し合うので，最初の等号がなりたつ．2 番目の等号は $f_1(z)$，$f_2(z)$ の正則性の結果である．モレラ (Morera) の定理により，上の結果は $f_*(z)$ が D_* で正則であることを示している．□

鏡像の原理としては，シュワルツの鏡像の原理(演習問題 8 の 3)がその名称を連想させてくれる．それは実軸のある区間 I の片側で正則で，I 上で実数値をとる複素関数は，区間 I を越えて他の側に接続される．そのとき，実軸に関し鏡像となる点(すなわち互いに複素共役の点)では，関数も複素共役値をとる．

さらに，**円に関して対称な点**という概念を導入すると，鏡像の原理は一般化される．半径 R の円 C があり，2 点 P_1，P_2 が円 C に関して対称であるとは，P_1，P_2 が同じ半径上にあって，中心 O から各点までの距離 r_1，r_2 の積が

$$r_1 r_2 = R^2$$

を満たすときである(図 8.6)．P_1 と P_2 が円 C に関し対称な 2 点であるとし，この 2 点を通る円 C′ (あるいは C″)を描く．C′ と C の交点を Q とする．関係式 $r_1 r_2 = R^2$ および幾何学の「方べキの定理」により，半径 $\overline{OQ}$ は円 C′ の接線となる．したがって円 C と円 C′ は直交する．すなわち，円 C に関し対称な 2 点を通る円の族は C に直交する一群の円からなる．

シュワルツの鏡像の原理を円に関して対称な 2 点に拡張する問題は§11.3(x)で考察される．

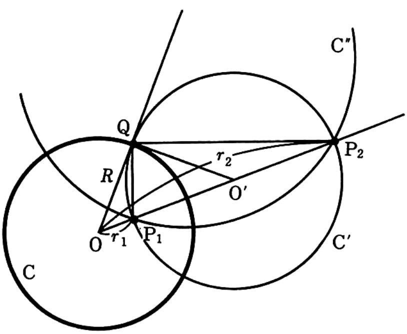


図 8.6

演習問題 8

1. 次の 2 つのベキ級数

$$(\text{i})\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(z-1)^n}{n}, \qquad (\text{ii})\quad i\pi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{n}$$

は互いに他の解析接続であることを示せ.

2. 関数 $f_1(z)$ は曲線 L 上の閉区間 l の片側で正則で, L の上まで連続とする. 他方, $f_2(z)$ は L の他の側で同じ性質をもち, L 上で $f_1(z)=f_2(z)$ とする. このとき, $f_2(z)$ は $f_1(z)$ の解析接続であることをコーシーの積分公式を使って示せ.

3. 関数 $f(z)$ は実軸の区間 (α, β) の片側のある領域 D で正則とし, その区間の上まで連続で, かつその上で実数値をとるものとする. そのとき, $f(z)$ は区間 (α, β) を越えて D の鏡像の領域 $\bar{\mathrm{D}}$ に解析接続でき, $z\epsilon\bar{\mathrm{D}}$ に対する関数値 f は $f(z)=\overline{f(\bar{z})}$ で与えられることを示せ [シュワルツの鏡像の原理]. (注 ; 例えば D で $f(z)=az^2$ (aは実数) とすると, $\overline{f(\bar{z})}=\overline{a\bar{z}^2}=az^2$)

4. 関数

$$f(z)=\frac{\sin\pi\beta}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{t^{-\beta}}{t+z}\,\mathrm{d}t \qquad (0<\mathrm{Re}(\beta)<1)$$

は正の実軸上で定義された関数 $x^{-\beta}$ を, 複素 z 面 $(-\pi<\arg z<\pi,\ z\neq 0)$ へ拡張した解析関数の積分表示になっていることを証明せよ.

[ヒント : 第 9 章 [例 3] 参照].

9. 周積分

9.1 複素積分のいくつかの例

複素平面上の閉曲線に沿う線積分は周積分(contour integral)といわれる．これによって多くの定積分の値が難なく求められる．そのとき留数定理，コーシーの積分定理，積分公式等がしばしば役に立つ．その応用の例をここで示すことにしよう．

［例 1］ 次の積分を考えよう：

$$I=\oint_{\mathrm{C}}\frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} \tag{9.1}$$

ここで閉曲線 C は実軸の区間 $[-R, R]$ と上半面の半径 R の半円 C_R からなるものとし(図 9.1)，R は十分大きくとるものとする．

被積分関数は

$$\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{2i}\frac{1}{z-i}-\frac{1}{2i}\frac{1}{z+i}$$

と書けるから，$z=\pm i$ に 1 位の極を有する．このうち，積分に寄与する C の内部の極は $z=i$ で，そこでの留数は $1/2i$ であるから，留数定理 (6.9) より，$I=2\pi i/2i=\pi$．他方，式(9.1)の積分は 2 つの部分に分けられる：

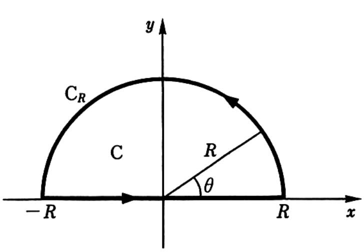


図 9.1

$$I=\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}+\int_0^{\pi}\frac{R\mathrm{e}^{i\theta}i\,\mathrm{d}\theta}{R^2\mathrm{e}^{i2\theta}+1}$$

第 1 項は実軸の区間 $[-R, R]$ 上の積分で，第 2 項は半円 C_R 上の積分である．第 2 項を I_2 とすると

$$|I_2|\leqq\int_0^{\pi}\frac{R\mathrm{d}\theta}{|R^2\mathrm{e}^{i2\theta}+1|}\leqq\frac{R}{R^2-1}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{R}\left(1+O\left(\frac{1}{R^2}\right)\right)$$

ここで，$|\mathrm{e}^{i\theta}i|=1$，$|R^2\mathrm{e}^{i2\theta}+1|\geqq R^2-1$ を用いた．したがって，$R\to\infty$ の極限では $I_2\to 0$ となり，次の定積分の公式を得る：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}=\pi \tag{9.2}$$

次の補助定理は，大きな半円上の積分の寄与がやはり省略できる場合である．

ジョルダンの補助定理

> 上半面 $(0\leqq\arg z\leqq\pi)$ で $z\to\infty$ のとき，関数 $f(z)$ は一様に $f(z)\to 0$ とする．このとき，上半面の半径 R の半円 C_R 上の次の積分 I_R は，$R\to\infty$ のとき
>
> $$I_R=\int_{\mathrm{C}_R}\mathrm{e}^{iaz}f(z)\,\mathrm{d}z\to 0\quad(R\to\infty) \tag{9.3}$$
>
> となる．ただし，実数 a は正とする［$\mathrm{e}^{iz}(a=1)$ については図 9.2 参照］．

▶ $z=R\mathrm{e}^{i\theta}$ とおくと

$$I_R=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{iaR(\cos\theta+i\sin\theta)}f(R\mathrm{e}^{i\theta})R\mathrm{e}^{i\theta}i\,\mathrm{d}\theta$$

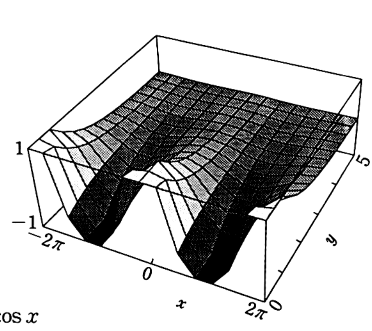


図 9.2　$\mathrm{Re}\,\mathrm{e}^{iz}=\mathrm{e}^{-y}\cos x$

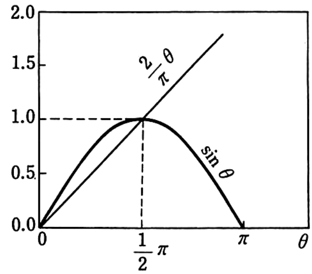


図 9.3

正数 ε および十分大きな R_0 に対し，$R>R_0$ なら $|f(z)|<\varepsilon$ とできるから

$$|I_R|\leq R\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-aR\sin\theta}|f|\,\mathrm{d}\theta<2\,\varepsilon R\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-aR\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

区間 $[0, \pi/2]$ の θ に対し，$\sin\theta$ は上に凸で，$\sin\theta\geqq(2/\pi)\theta$ がなりたつ（図 9.3）．ゆえに

$$|I_R|<2\,\varepsilon R\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-aR2\theta/\pi}\,\mathrm{d}\theta=\varepsilon\frac{\pi}{a}(1-\mathrm{e}^{-aR})$$

ε は任意の正数であるから，これは式(9.3)を意味している．　□

［例 2］　$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2} \tag{9.4}$$

▶ジョルダンの補助定理とコーシーの積分定理を応用してこれを示すことができる．図 9.4 の 4 つの径路は閉曲線 C をつくる：$\mathrm{C}=\mathrm{C}_R+\mathrm{C}_-+\mathrm{C}_\varepsilon+\mathrm{C}_+$．$\mathrm{C}_R$，$\mathrm{C}_\varepsilon$ は半径 R，ε の半円，C_-，C_+ は実軸上の区間 $[-R, -\varepsilon]$，$[\varepsilon, R]$ を表わす．そこで関数 $g(z)=\mathrm{e}^{iz}/z$ を閉径路 C に沿って積分することを考える．関数 e^{iz} は無限遠点を除くすべての z で正則であるから，$g(z)$ の特異点は $z=0$ にあるが，この点は半円 C_ε によって C の外にお

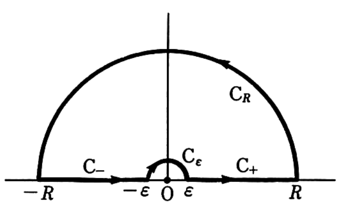


図 9.4

かれているので，コーシーの積分定理より

$$\oint_{C}\frac{e^{iz}}{z}dz=0$$

これを記号的に

$$\oint_{C}=\int_{C_R}+\int_{C_-}+\int_{C_\varepsilon}+\int_{C_+}=0 \tag{9.5}$$

と書こう．半円 C_R 上の積分についてはジョルダンの補助定理が使えるので $(a=1,\ f(z)=1/z)$，$R\to\infty$ のとき第1項からの寄与は消える．次に C_ε 上の積分では

$$g(z)=\frac{1}{z}+P(z),\quad P(z)=\frac{e^{iz}-1}{z}$$

と書けることを使う．ここで $P(z)$ は $z=0$ を含む有界領域で正則であり $(z=0$ は除去可能な特異点)，したがって C_ε 上で有界である：$|P(z)|<M$ （M はある定数)．このとき

$$\int_{C_\varepsilon}\left[\frac{1}{z}+P(z)\right]dz=\int_{\pi}^{0}\frac{\varepsilon e^{i\theta}id\theta}{\varepsilon e^{i\theta}}+\int_{C_\varepsilon}P(z)dz=-i\pi+O(\varepsilon)$$

というのは，次のように評価できるからである：

$$\left|\int_{C_\varepsilon}P(z)dz\right|<M\int_{C_\varepsilon}|dz|=M\pi\varepsilon$$

C_ε 上の積分は $\varepsilon\to0$ のとき，$-i\pi$ を与える．最後に，実軸上の積は

$$\left[\int_{-R}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{R}\right]\frac{e^{ix}}{x}dx=\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}dx=2i\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\sin x}{x}dx$$

となる．したがって，$R\to\infty$，$\varepsilon\to0$ の極限では，式(9.5)は(9.4)を与える． □

[例 3]

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin\pi a} \tag{9.6}$$

ただし，a は実定数で，$0<a<1$ とする．

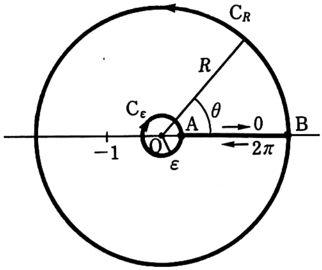


図 9.5

▶関数　$f(z)=\dfrac{z^{a-1}}{1+z}=\dfrac{1}{1+z}\,\mathrm{e}^{(a-1)\ln z}$

を定義する．これは $z=0$ に分岐点を有するが，図 9.5 の閉曲線 C＝AB($\theta=0$)＋C_R＋BA($\theta=2\pi$)＋C_ε の内部で，$z=-1$ を除いて一価正則である．ここで $z=r\mathrm{e}^{i\theta}$，$0\leqq\theta\leqq2\pi$ とする．$f(z)$ の一位の極 $z=-1=\mathrm{e}^{i\pi}$ での留数は $\mathrm{Res}(\mathrm{e}^{i\pi})=(\mathrm{e}^{i\pi})^{a-1}=-\mathrm{e}^{i\pi a}$ であるから，留数定理により

$$\oint_{\mathrm{C}}\frac{z^{a-1}}{1+z}\mathrm{d}z=-2\pi i\,\mathrm{e}^{i\pi a} \tag{9.7}$$

半径 R および ε の円 C_R，C_ε 上の積分は

$$\left|\int_{\mathrm{C}_R}\right|<\frac{R^{a-1}}{R-1}2\pi R,\qquad \left|\int_{\mathrm{C}_\varepsilon}\right|<\frac{\varepsilon^{a-1}}{1-\varepsilon}2\pi\varepsilon$$

となる．$R\to\infty$，$\varepsilon\to0$ の極限において，前者は $a<1$ のために，後者は $a>0$ のために，いずれも寄与は消える．残る実軸上の積分は，AB($\theta=0$) 上では $z=x$ なので $z^{a-1}=x^{a-1}$，BA($\theta=2\pi$)上では $z=x\,\mathrm{e}^{i2\pi}$ なので $z^{a-1}=x^{a-1}\mathrm{e}^{i2\pi a}$ とすると

$$\int_\varepsilon^R\frac{x^{a-1}}{1+x}\mathrm{d}x+\int_R^\varepsilon\frac{x^{a-1}\mathrm{e}^{i2\pi a}}{1+x}\mathrm{d}x=(1-\mathrm{e}^{i2\pi a})\int_\varepsilon^R\frac{x^{a-1}}{1+x}\mathrm{d}x$$

これが，$R\to\infty$，$\varepsilon\to0$ のとき式(9.7)の左辺を与えるので，式(9.6)が得られる．ただし $\sin\pi a=(\mathrm{e}^{i\pi a}-\mathrm{e}^{-i\pi a})/2i$．§12.2 で，左辺の積分が B 関数によって $B(a,\ 1-a)$ と表わされることがわかる．　□

［例 4］ $$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+a\cos\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}\qquad (0<a<1)$$

を示せ．

▶複素変数 $z=e^{i\theta}$ を導入すると

$$\cos\theta=\frac{1}{2}(z+z^{-1}),\qquad d\theta=\frac{1}{iz}dz$$

と書ける．θ が区間$(0, 2\pi)$を動くとき，変数 z は原点を中心とする単位円 C 上を動く．与えられた積分を変数 z を使って表わすと

$$\oint_C\frac{dz}{iz\left(1+\frac{1}{2}a(z+z^{-1})\right)}=\frac{2}{ia}\oint_C\frac{dz}{z^2+\frac{2}{a}z+1}$$

被積分関数の極は，方程式 $g(z)=z^2+2a^{-1}z+1=0$ の根である．2 実根の積は 1 に等しく，単位円 C 内にある根は

$$z_1=\frac{1}{a}(-1+\sqrt{1-a^2})$$

で与えられる（根号は正とする）．点 z_1 での留数 r は

$$r=\frac{2}{ia}\lim_{z\to z_1}\frac{z-z_1}{g(z)}=\frac{2}{ia}\frac{1}{g'(z_1)}$$
$$=\frac{1}{i}\frac{1}{az_1+1}=\frac{1}{i\sqrt{1-a^2}}$$

ただし，$g(z_1)=z_1{}^2+\dfrac{2}{a}z_1+1=0$．ゆえに

$$\frac{2}{ia}\oint_C\frac{dz}{z^2+\frac{2}{a}z+1}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$$ □

一般に，三角関数を含む積分では変数 $z=e^{i\theta}$ を導入する方法がある．このとき積分は

$$\int_0^{2\pi}F(\cos\theta,\ \sin\theta)d\theta=\oint_C F\left(\frac{z+z^{-1}}{2},\ \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{dz}{iz}$$

の形に変換される．ただし，C は単位円 $|z|=1$ である．

[例 5]　$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(1+a\cos\theta)^2}=\frac{2\pi}{(1-a^2)^{3/2}}\qquad(0<a<1)$$

を示せ.

▶変数 $z=e^{i\theta}$ を導入すると，左辺の積分は

$$\frac{4}{ia^2}\oint_C\frac{z\,dz}{\left(z^2+\dfrac{2}{a}z+1\right)^2}$$

となる．例 4 と同様に，単位円 C 内には $z=z_1$ に 2 位の極がある．被積分関数の留数を $\hat{r}$ とすると

$$\hat{r}=\lim_{z\to z_1}\frac{d}{dz}\left[(z-z_1)^2\frac{z}{[g(z)]^2}\right],\quad g(z)=z^2+\frac{2}{a}z+1$$

ここで $g(z_1)=0$ であるが，もう 1 つの根を z_2 とすると，$g(z)=(z-z_1)(z-z_2)$．ただし $z_2=(-1-\sqrt{1-a^2})/a$.

$$\hat{r}=\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(z-z_2)^2}\right]\Bigg|_{z_1}=-\frac{z_1+z_2}{(z_1-z_2)^3}$$

ゆえに

$$\frac{4}{ia^2}\oint_C\frac{z\,dz}{\left(z^2+\dfrac{2}{a}z+1\right)^2}=2\pi i\frac{4}{ia^2}\frac{2/a}{\left(\dfrac{2}{a}\sqrt{1-a^2}\right)^3}$$ □

次の積分の証明には径路積分の方法は使われていないが，よく使われる公式なので，ここに掲げることにする．

[例 6]　$$I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2},\qquad\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}\qquad(9.8)$$

▶これを示すために，関数 $e^{-x^2-y^2}$ を第 1 象限 Q_1 全体にわたる面積分することを考える：

$$\iint_{Q_1}e^{-x^2-y^2}dx\,dy=\int_0^\infty e^{-x^2}dx\int_0^\infty e^{-y^2}dy=I^2$$

一方，極座標 (r,θ) を導入すれば，$dx\,dy=r\,dr\,d\theta$ で

$$I^2=\iint_{Q_1} \mathrm{e}^{-r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r$$
$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\xi}\frac{1}{2}\mathrm{d}\xi=\frac{\pi}{4}$$

となる．したがって，$I=\sqrt{\pi}/2$ が得られる． □

9.2 積分の主値および佐藤の超関数

関数の特異点が積分径路の内部あるいは外部にあるときには，留数定理，コーシーの積分定理などが応用できる．ところが，次の実軸上の積分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-a}\mathrm{d}x \qquad (a\text{ は実数})$$

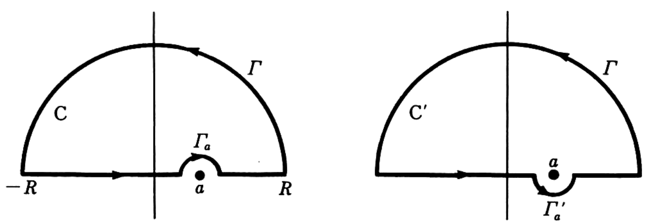
はどのように評価したらいいだろうか．まず，x を複素変数 z におき換えて，被積分関数を複素面に解析接続した関数

$$F(z)=\frac{f(z)}{z-a}$$

を定義する．ここで，分子の関数 $f(z)$ は，$z=a$ のみならず実軸上で正則であるとし，また正定数 k，A に対し

$$|z|\to\infty \text{ とのき，} \quad |z|^k|f(z)|<A$$

すなわち，$|z|^k|f(z)|$ は無限遠で有界とする．関数 $F(z)$ は実軸上の点 a に 1 位の極を有している．そこで，図 9.6(a)のような極 a の上方をう回する実軸に沿う径路と十分大きな半径 R の上半面の半円 Γ 上の閉曲線 C 上の積分を考える．a をう回する曲線は半径 ε の半円 Γ_a とする．このとき，留数定理より



(a)　(b)

図 9.6

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = \int_{-R}^{a-\varepsilon}\frac{f(x)}{x-a}\mathrm{d}x + \int_{a+\varepsilon}^{R}\frac{f(x)}{x-a}\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_a}\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z + \int_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z \tag{9.9 a}$$

$$= 2\pi i\,[\text{C 内の極の留数の和}] \tag{9.9 b}$$

最後の積分は，十分大きい R の値に対し，式(9.9)より

$$\left|\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z\right| \leqq \frac{R}{R-a}\int_0^{\pi}|f(Re^{i\theta})|\mathrm{d}\theta < \frac{R}{(R-a)R^k}\pi A$$

これは $R\to\infty$ のとき $k>0$ だから，寄与は無限小となる．他方，Γ_a 上の積分は $\varepsilon\to 0$ のとき

$$\int_{\Gamma_a}\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = i\int_{\pi}^{0}f(a+\varepsilon e^{i\theta})\mathrm{d}\theta \to -i\pi f(a) \tag{9.10}$$

となる．ここで，積分の**主値**(principal value)を

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_{-\infty}^{a-\varepsilon}\frac{f(x)}{x-a}\mathrm{d}x + \int_{a+\varepsilon}^{\infty}\frac{f(x)}{x-a}\mathrm{d}x\right] = \mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-a}\mathrm{d}x \tag{9.11 a}$$

$$= \fint_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-a}\mathrm{d}x \tag{9.11 b}$$

で定義する．左辺の第 1 項の被積分関数は $x\to a-\varepsilon$ のとき $-f(a)/\varepsilon$ に近づき，第 2 項では $x\to a+\varepsilon$ のとき $f(a)/\varepsilon$ に近づくので，発散部分がちょうど打ち消し合って，和は $\varepsilon\to 0$ のとき有限値に近づくことが期待できる．それを主値あるいはコーシーの積分主値とよび，記号的に P を使ったり，積分記号にバーをつけたりして表わす．このようにして，式(9.9 a)は，$R\to\infty$，$\varepsilon\to 0$ の極限で

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = \int_{\frown}\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = \mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-a}\mathrm{d}x - i\pi f(a) \tag{9.12}$$

と書ける．この値は式(9.9 b)で与えられるから，主値が有限であることは明らかである．

次に，点 a のう回のしかたを変えて図 9.6(b)のようにしてみる．こんどの閉曲線 C′ についての積分は，式(9.10)に対応する値は $i\pi f(a)$ になるので

$$\oint_{C'} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{\smile} \frac{f(z)}{z-a} dz = P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx + i\pi f(a) \tag{9.13}$$

積分径路 C と C′ の違いは，C′ では特異点 $z=a$ が新しく閉曲線の中に入ったことになる．そこでの留数は $f(a)$ であるから，式(9.12)に $2\pi i f(a)$ を加えたものが式(9.13)に等しくなっている．式(9.12)，(9.13)の 2 番目の積分についている記号は，半径 R の大きな半円上の積分の寄与を省略することと，極 a の上下いずれの側をう回するかを表わしている．

もし関数 $f(z)$ が実軸を含む上半面で正則であったとすると，$f(z)/(z-a)$ の C′ 内の特異点は $z=a$ における 1 位の極だけになり，式(9.13)の左辺の積分は $2\pi i f(a)$ を与える．このとき式(9.13)は次の形に書ける．

$$f(a) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx \qquad (a：実数) \tag{9.14}$$

これは次節の分散公式の基礎公式となる．

積分径路のとり方を少し変えて，実軸から少し上または下にずらしてみる．すなわち，図 9.6(a)の代わりに，図 9.7(a)のように AB の部分は $z=x+i\varepsilon(\varepsilon>0,\ -R\leqq x\leqq R)$ としてみる．ε を十分小さくとり，実軸と AB の間に $f(z)$ の特異点は含まれないとすれば，2 つの閉曲線 C と C_1 に関する積分は一致する．したがって次の等式が得られる：

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)dx}{x-a+i\varepsilon} = P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx - i\pi f(a) \tag{9.15}$$

同様に，直線部分を下にずらして，図 9.7(b)のように区間 A′B′ を $z=x-i\varepsilon(\varepsilon>0,\ -R\leqq x\leqq R)$ として積分しても，C′ と C_1' に関する積分は不変であろう．

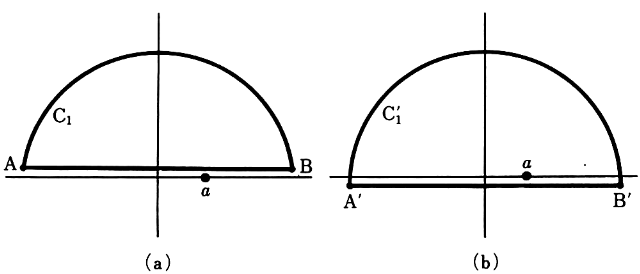


図 9.7

したがって

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-a-i\varepsilon}\,\mathrm{d}x=\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-a}\,\mathrm{d}x+i\pi f(a) \tag{9.16}$$

と書ける．ここで $\varepsilon\to+0$ は正の側から ε を 0 に近づけることを意味する．式(9.15)，(9.16)の積分関係式は記号的に

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{x-a\pm i\varepsilon}=\mathrm{P}\,\frac{1}{x-a}\mp i\pi\,\delta(x-a) \tag{9.17}$$

と書かれることがある．この両辺に $f(x)$ をかけて，区間 $(-\infty,\infty)$ で積分すれば上の両式が得られるという意味である．すなわち

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-a\pm i\varepsilon}\,\mathrm{d}x=\fint_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-a}\,\mathrm{d}x\mp i\pi f(a) \tag{9.18}$$

式(9.17)で，ディラックの δ 関数 $\delta(x)$ を使っている．δ 関数は，任意のなめらかな関数 $g(x)$ に対し

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\delta(x-a)\mathrm{d}x=g(a) \tag{9.19}$$

$$\int_I\delta(x)\mathrm{d}x=1,\qquad \delta(x)=0\quad(x\neq0\text{ のとき}) \tag{9.20}$$

なる関係を与える関数として定義され，超関数とよばれる(I は 0 を含む実区間)．式(9.15)，(9.16)の差をとることで

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{1}{x+i\varepsilon-a}-\frac{1}{x-i\varepsilon-a}\right]=-2\pi i\,\delta(x-a)$$

の関係も得られる．左辺は，上半面で正則な関数 $1/(z-a)$ と下半面で(も)正則な関数 $1/(z-a)$ の実軸での極限値の差を表わしている($z=x\pm i\varepsilon$ だから；また特異点は実軸上にある)．この差は超関数 $\delta(x-a)$ の $-2\pi i$ 倍に等しい．このように上半面(下半面)で正則な関数 $F_+(z)$ ($F_-(z)$) の対によって表わされる関数 $f(x)$，すなわち

$$\lim_{\varepsilon\to+0}[F_+(x+i\varepsilon)-F_-(x-i\varepsilon)]\equiv[F_+(z),\ F_-(z)]=f(x) \tag{9.21}$$

は“佐藤の超関数”とよばれる*．デルタ関数 $\delta(x)$ を佐藤の超関数の形で表現

* 佐藤幹雄：Proc. Japan. Academy 34 (1958) および巻末分献 6) を参照.

すると

$$\left[-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z},\ -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z}\right]=\delta(x) \tag{9.22}$$

と表わせる($a=0$ とした).

ふつうの実関数 $g(x)$ にも超関数表現を与えることができる. もし $g(x)$ が $(-\infty,\infty)$ で絶対積分可能, すなわち $\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|\mathrm{d}x$ が収束するならば

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(x)}{x-z}\mathrm{d}x \tag{9.23}$$

が存在して, $F(z)$ は上半面 ($\mathrm{Im}\,z>0$) および下半面 ($\mathrm{Im}\,z<0$) でそれぞれ正則な関数 $F_+(z)$, $F_-(z)$ を表わす. しかも

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\{F_+(x+i\varepsilon)-F_-(x-i\varepsilon)\}=g(x) \tag{9.24}$$

がなりたつ(演習問題 9 の 5).

9.3　分散公式

光の散乱問題, あるいは量子力学における散乱問題では, しばしば解析関数の実部を虚部の積分で表現したり, あるいはその逆の関係が現われる. そのような関係式は一般に分散公式とよばれる.

上半面で正則な関数 $f(z)$ に対する関係式(9.14)の実部をとると

$$\mathrm{Re}\,f(a)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\,f(x)}{x-a}\mathrm{d}x \tag{9.25}$$

が得られる. これは $f(a)$ の実部を実軸上の $\mathrm{Im}\,f(x)$ の値を使って表わす公式である. 式(9.14)の虚部をとると, 上式で Re と Im を交換し, 右辺に負号をつけた公式が得られる.

式(9.25)で, a を x と書き, x を x' とすると

$$\mathrm{Re}\,f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\,f(x')}{x'-x}\mathrm{d}x' \tag{9.26}$$

となる. この式で $x=x_0$ とおいて得られる式を, 同じ式から引きさると

$$\mathrm{Re}\,f(x)-\mathrm{Re}\,f(x_0)=\frac{x-x_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\,f(x')}{(x'-x)(x'-x_0)}\mathrm{d}x' \tag{9.27}$$

を得る．式(9.26)と(9.27)の違いは，$x' \to \pm\infty$ のとき $\mathrm{Im}\, f(x') \to$ 定数($\neq 0$)であっても，後者は成立することである．次に考察するのは，実軸上に分岐点をもつ関数に対する分散公式である．

関数 $f(z)$ が，実軸上 $a(>0)$ から $+\infty$ へ引いた切断線(カット)を除いて，全複素面上で正則とする．また $f(z)$ は実軸の残りの区間$(-\infty,\ a)$上では実数で，一般の点 z では $|z| \to \infty$ のとき，$|z|^k |f(z)|$ $(k>0)$ が有界と仮定する．このとき

$$f(z) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\pi} \int_a^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\, f(x+i\varepsilon)}{x-z} \mathrm{d}x \qquad (9.28)$$

がなりたち，これも分散公式といわれる．この式を導いてみよう．

実軸の区間(a, ∞)上にない任意の点 z に対して

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathrm{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

である．ここでCは，図9.8のような積分径路である．$|z| \to \infty$ のとき $|f(z)/z|$ は $1/|z|$ より速く小さくなるから，半径 R の円周 Γ 上の積分寄与は $R \to \infty$ のとき消える．したがって

$$f(z) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{a+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta - \int_{a-i\varepsilon}^{\infty-i\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{2\pi i} \left[\int_a^{\infty} \frac{f(x+i\varepsilon)}{x-z+i\varepsilon} \mathrm{d}x - \int_a^{\infty} \frac{f(x-i\varepsilon)}{x-z-i\varepsilon} \mathrm{d}x \right]$$

と書ける．z は積分区間上にはないと仮定されているので，$\varepsilon \to +0$ の極限で分

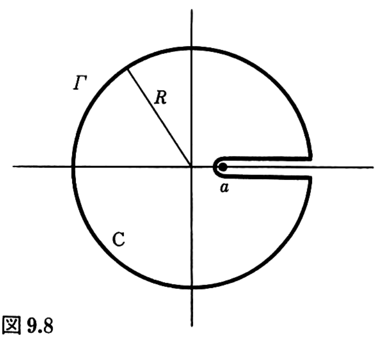


図9.8

母の $i\varepsilon$ は省略できる．ゆえに

$$f(z)=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2\pi i}\int_a^\infty\frac{f(x+i\varepsilon)-f(x-i\varepsilon)}{x-z}\,\mathrm{d}x \tag{9.29}$$

を得る．仮定により，z が実軸の区間 $(-\infty,\ a)$ 上にあるとき，$f(z)$ は実である．このときシュワルツの鏡像の原理(演習問題 8 の 3)から，$f(\bar{z})=\overline{f(z)}$ でなければならない．この性質を使うと

$$f(x+i\varepsilon)-f(x-i\varepsilon)=f(x+i\varepsilon)-\overline{f(x+i\varepsilon)}=2i\,\mathrm{Im}\,f(x+i\varepsilon)$$

と書ける．これを式(9.29)に代入すれば，式(9.28)が得られる．

演習問題 9

1. 次の定積分を示せ（a：正定数，m：定数）：

（a） $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x = 2\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

（b） $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos x^2 \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \sin x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

（c） $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2a}\mathrm{e}^{-|m|a}$

（d） $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\sin mx}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-ma} \quad (m>0)$

2. 次の定積分を計算せよ．

（a） $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}\mathrm{d}\theta \qquad (a>b>0)$

（b） $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos k\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\mathrm{d}\theta \qquad (|a|\neq 1,\ k：\text{正整数})$

（c） $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x}\left(\frac{b-x}{x-a}\right)^{-\alpha}\mathrm{d}x \qquad (b>a>0,\ 1>\alpha>0)$

3. $$\mathrm{P}\frac{1}{x-a}$$

も佐藤の超関数である．なぜか．

4. ディラックのデルタ関数 $\delta(x)$ を，区間 $(-\infty,\ x)$ で積分すると，ヘビサイド関数 $H(x)$ が得られる：

$$H(x)=0 \quad (x<0), \qquad 1 \quad (x>0).$$

これに佐藤の超関数表現を与えるとき，デルタ関数との関係はどのようなものか．

5. ふつうの関数 $g(x)$ に対する佐藤の超関数表現(9.24)を証明せよ．

6. 複素関数 $f(z)$ に対するポアソンの公式より（式(5.11)および演習問題 5 の 10），半径 R の円周上の点 $R\mathrm{e}^{i\theta}$ に対し，$f(z)$ の虚部が

$$v(R\mathrm{e}^{i\theta}) = v(0) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(R\mathrm{e}^{it})\cot\frac{\theta-t}{2}\mathrm{d}t$$

と書けることを示せ．

7. 図 9.9 の径路 D 上の積分によって定義された関数

$$P_\nu(z)=\frac{1}{2^{\nu+1}\pi i}\oint_{\mathrm{D}}\frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}\mathrm{d}t \qquad (9.23)$$

（ルジャンドル（Legendre）関数）は，次のルジャンドルの微分方程式を満たすことを示せ：

$$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}^2P_\nu}{\mathrm{d}z^2}-2z\frac{\mathrm{d}P_\nu}{\mathrm{d}z}+\nu(\nu+1)P_\nu=0 \qquad (9.24)$$

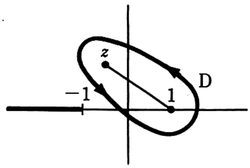


図 9.9　t 面

8．前問の式(9.23)は ν が整数 $n=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots$ のとき，ルジャンドルの多項式

$$P_n(z)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}(z^2-1)^n \qquad (9.25)$$

に帰着することを示し（図 9.10），さらに次の直交関係がなりたつことを示せ：

$$\int_{-1}^{1}P_n(z)P_m(z)\mathrm{d}z=\begin{cases}0 & (n\neq m)\\ \dfrac{1}{2n+1} & (n=m)\end{cases}$$

9．ルジャンドル多項式(9.25)は次の母関数展開で表現されることを証明せよ：

$$\frac{1}{\sqrt{1-2z\zeta+\zeta^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(z)\zeta^n \qquad (9.26)$$

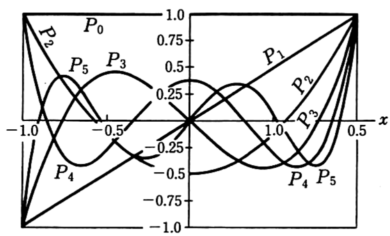


図 9.10　ルジャンドル多項式 $P_n(x)(-1\leq x\leq 1)$

10. 関数のいろいろな表現

10.1　有理形関数の展開表現

A.　部分分数展開

最も簡単な有理形関数は有理関数(7.2)であるが，これは分母を因数分解することによって部分分数の形に表わすことができる．一般の有理形関数に同様の表現を与えるために，関数の極の主要部を与えることにする．有理形関数 $f(z)$ は孤立特異点の極を除く全平面で一価正則な関数である．例えば $\cot z = \cos z/\sin z$ はこのような有理形関数で，$\sin z$ が 0 となる点 $z=\pi n$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdot$) に極をもち，その数はいうまでもなく無限個ある．

有理形関数は無限に多くの極をもっていても，平面の任意の有界領域 D 内ではただ有限個の極をもつだけである．というのは，もしそうでなければ D の中に極の集積点が少なくとも 1 つ存在する．この点は $f(z)$ の特異点であるが，しかし極ではない．なぜなら，定義により(§ 6.1)極は常に孤立特異点だからである．ゆえに，どんな有界領域においても極の数は有限である．

次に留数定理によって，有理形関数を無限級数の形で表わすことを考えよう．“有理形関数 $f(z)$ は，点 $a_1, a_2, \cdots\cdot, a_k, \cdots\cdot$ に極があるとし，そこでの主要部が

$$P_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) \qquad k=1,2,\cdots\cdot \tag{10.1}$$

とする．ここで，$P_k(z)$ は z の多項式である．極の位置は原点からの距離に応じて

$$|a_1| \leqq |a_2| \leqq \cdots\cdot \leqq |a_k| \leqq \cdots\cdot$$

と順序づけされているとする．”

上に述べたことから，$k\to\infty$ のとき $|a_k|\to\infty$ である．考察の便宜上，複素 ζ

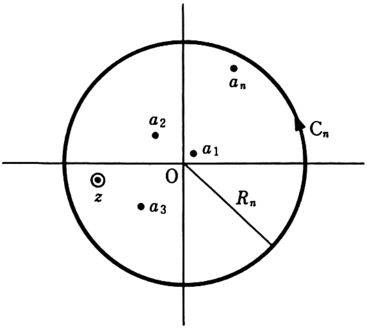


図 10.1

面で関数 $f(\zeta)$ を考える．ζ 面の原点を中心として，点 $a_1, \cdots, a_n$ を囲む半径 R_n の円 C_n をとり(図 10.1)，R_n は次々と限りなく大きくすることを考える．C_n 上には極はないものと仮定し，$f(\zeta)$ は C_n 上で有界

$$|f(\zeta)|<M \qquad (C_n \text{ 上で}) \tag{10.2}$$

とする．点 z を C_n の内部にとり，関数 $f(\zeta)/(\zeta-z)$ を C_n 上で一周積分する．ただし，z は a_k とは異なるものとする．この関数 $f(\zeta)/(\zeta-z)$ は点 z に 1 位の極を有し，そこでの留数は $f(z)$ である．また点 $a_1, \cdots, a_n$ には一般の極を有する．留数定理および以下の考察により

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_n}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=f(z)+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{W_n(\zeta)}{\zeta-z}\text{ の } a_k \text{ での留数}\right) \tag{10.3}$$

ただし

$$W_n(\zeta)=\sum_{k=1}^{n}P_k\left(\frac{1}{\zeta-a_k}\right) \tag{10.4}$$

関数 $W_n(z)$ は C_n の内部にあるすべての極の主要部の和である．これは式(7.2)のような形に書けて，有理関数でありしかも分母の次数は分子の次数より高い．このとき，式(10.3)の第 2 項の和は $-W_n(z)$ に等しいことを示すことができる．

というのは，$W_n(\zeta)$ は分母の次数が分子の次数よりも少なくとも 1 は高い有理関数であるから，$W_n(\zeta)/(\zeta-z)$ の分母の多項式の次数は，分子の多項式の次数より少なくとも 2 は高い有理関数である．したがって，十分大きな ζ の値では

$$\frac{W_n(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{A_2}{\zeta^2} + \frac{A_3}{\zeta^3} + \cdots\cdot$$

と展開できよう．すべての $a_1, \cdots\cdot, a_n$ を含む十分大きい半径の円について一周積分すれば 0 となる（ζ^{-1} の項がないからである．ここで，n は固定）．したがって，C_n 内部の極における留数全部の和は 0 に等しい．ところが，極 z における留数は明らかに $W_n(z)$ であるから，その他の極 a_k すべての留数の和は

$$-W_n(z) = -\sum_{k=1}^{n} P_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)$$

に等しい．このようにして，式(10.3)は

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) - \sum_{k=1}^{n} P_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) \tag{10.5}$$

となる．この式で $z=0$（極でないと仮定して）とおくと

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta = f(0) - \sum_{k=1}^{n} P_k\left(-\frac{1}{a_k}\right).$$

前の式からこの式を引くと

$$f(z) - f(0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_n} f(\zeta)\frac{z}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta + \sum_{k=1}^{n}\left[P_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) - P_k\left(-\frac{1}{a_k}\right)\right]$$

を得る．ここで十分大きな n および R_n については，右辺の積分は

$$\left|\oint_{C_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta\right| \leqq \frac{1}{R_n(R_n - |z|)}\int_{C_n} |f(\zeta)||d\zeta| \leqq \frac{2\pi M}{R_n - |z|} \tag{10.6}$$

ゆえに，$R_n \to \infty$ のときこの積分は消える．このようにして，求めている有理形関数が得られた：

$$f(z) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[P_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) - P_k\left(-\frac{1}{a_k}\right)\right] \tag{10.7}$$

R_n を限りなく大きくするとき，C_n の内部に絶えず新しい極が入ってくる．第 2 項の無限級数が絶対収束ならば和の順序は問題にならないが，もしそうでないときには，和は順序を考慮して，C_n と C_{n+1} の間にある極に関する和は 1 つにまとめることが必要となろう．このような条件収束の場合あるいは収束しない場合については後にさらに考察する（項目 C）．

B. 1位の極だけで表わされる有理形関数

特異点のすべてが1位の極で，極 a_k での留数が r_k とすると，$P_k(1/(z-a_k))=r_k/(z-a_k)$ と書ける．このような有理形関数は，式(10.7)より

$$f(z)=f(0)+\sum_{k=1}^{\infty} r_k\left(\frac{1}{z-a_k}+\frac{1}{a_k}\right) \tag{10.8}$$

これは $f(z)$ の**部分分数展開**を与えている．

［例 1］ $f(z)=\cot z-\dfrac{1}{z}$ $(z\neq 0)$，　$f(0)=0$

を考えよう．$\cot z=\cos z/\sin z$ で，分母は $\sin z=(e^{iz}-e^{-iz})/2i$ であるから，$\sin z=0$ は $e^{2iz}=1$ と同等で，それは解 $z=n\pi$ $(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots\cdot)$ をもつ．これは1位の零であるから $\cot z$ はそこに1位の極をもつ．$z=n\pi$ での留数は

$$r_n=\lim_{z\to n\pi}(z-n\pi)\left(\cot z-\frac{1}{z}\right)=(\cos n\pi)\lim_{h\to 0}\frac{h}{\sin(n\pi+h)}=1$$

点 $z=0$ は，$f(z)$ の特異点ではない（除去された特異点といってもよい）．というのは，$z\to 0$ のとき

$$\cot z-\frac{1}{z}=\frac{z\cos z-\sin z}{z\sin z}=\frac{-\frac{1}{3}z^3+O(|z|^5)}{z^2+O(|z|^4)}\to 0$$

となるからである．部分分数展開(10.8)で，$a_k=k\pi$，$r_k=1$ とすると

$$\cot z-\frac{1}{z}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{1}{z-k\pi}+\frac{1}{k\pi}\right) \tag{10.9}$$

を得る．ここで和記号の $'$ は $k=0$ を除く和を意味する．右辺の無限級数は，任意の有界領域Dの点 z において，その内部の有限個の極を除けば，絶対一様収束をすることが確かめられる．というのは，級数の一般項は

$$\frac{z}{(z-k\pi)k\pi}$$

であるが，有界領域Dにおいては $|z|<M$ であり，十分大きな k に対して

$$\left|\frac{z}{(z-k\pi)k\pi}\right|\leqq\frac{1}{k^2}\frac{M}{\pi(\pi-M/k)}$$

となる．$1/k^2$ の係数は $|k|$ が大きくなるとき有限の極限値 M/π^2 に近づき，

級数 $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ は収束してツェータ関数 $\zeta(2)$ を与える(§ 12.3)．したがって，級数(10.9)はどんな z の有界領域においても絶対一様収束する． □

式(10.9)で z を πz でおき換えれば次の式を得る：

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{k} \right) \tag{10.10}$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2} \tag{10.11}$$

C. 有理形関数の構成

極 a_k とそこで与えられた主要部

$$P_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)$$

をもつ有理形関数を構成することを考えよう．有限個の極 $a_k(k=1, \cdots, n)$ が与えられているなら

$$\sum_{k=1}^{n} P_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) \tag{10.12}$$

が明らかに求める有理形関数である．無限に多くの極 a_k がある場合に式(10.12)が $n \to \infty$ のとき収束するとは限らない．しかし，前項Bで見たように絶対収束する場合もあり，そのときには式(10.7)が求める関数を与える．

収束しない場合でも次の**ミッターク・レフラー** (Mittag-Leffler) の定理がなりたち，求める有理形関数の表現を与えることができる．極の分布と順序づけはAと同様とする．ただし点 $z=0$ は極ではないとしよう．主要部 $P_k(1/(z-a_k))$ は円 $|z|=|a_k|$ の内部では正則な関数であり，特に円 $|z| \leqq \frac{1}{2}|a_k|$ 内で一様収束級数に展開できる．したがって十分多くの項をとれば (n_k+1 項とする)，この級数の部分和 $Q_k(z)$ によって

$$\text{円}：|z| \leqq \frac{1}{2}|a_k| \text{ の中で } \left| P_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) - Q_k(z) \right| < \frac{1}{2^k} \tag{10.13}$$

とすることができよう．ただし

$$Q_k(z) = C_0^{(k)} + C_1^{(k)} z + \cdots + C_{n_k}^{(k)} z^{n_k}$$

は $P_k(1/(z-a_k))$ のテイラー展開の最初の z^{n_k} までの部分和とする．

そこで，次の級数

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(P_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)-Q_k(z)\right) \tag{10.14}$$

を定義しよう．$k\to\infty$ のとき $|a_k|\to\infty$ であるから，原点を中心として半径 R の任意の円 C_R を考えると，$k>N$ に対して $\frac{1}{2}|a_k|\geqq R$ となるような N が存在する．このような大きな k に対しては，円 C_R の中で式(10.13)がなりたち，$k>N$ の項について級数(10.14)は絶対一様収束し，したがって C_R の中で正則な関数を与える．残りの項は a_k が C_R の内部にあれば，主要部 $(1/(z-a_k))$ の極を生ずる．半径 R は任意であったから，式(10.14)が，与えられた極と主要部をもち，それ以外で正則な有理形関数を与えることがわかる．さらに，極 $z=0$ と主要部 $P_0(1/z)$ が与えられているなら，これもつけ加えれば

$$f(z)=F(z)+P_0\left(\frac{1}{z}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[P_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)-Q_k(z)\right] \tag{10.15}$$

が<u>与えられた極と主要部をもつ有理形関数の一般公式</u>を表わす．ここで $F(z)$ は任意の整関数である．というのは，同じ主要部をもつ 2 つの有理形関数の差は明らかに整関数でなければならないからである．この公式では，多項式 $Q_k(z)$ を求める手続きが必要であり，どちらかというと理論的意味の方に重点がある．

D. 与えられた零をもつ整関数

無限遠点を除く全平面で正則な関数は整関数という．多項式は零点をもつ整関数であるが，指数関数 e^z は零点を全くもたない整関数である．それは $z=x+iy$ とすると $|e^z|=e^x$ で，e^x はすべての実数 x に対して零とはならないからである ($x\to-\infty$ のときは $e^x\to0$)．

任意の整関数を $g(z)$ で表わすとき

$$f(z)=e^{g(z)} \tag{10.16}$$

は同様に整関数で，しかも零点をもたない．逆に零点をもたない整関数はこの形に書ける．実際，整関数 $f(z)$ が零点をもたなければ，$f'(z)/f(z)$ もまた整関数である．この関数を積分すれば

$$\int^z \frac{f'(z)}{f(z)}dz=\ln f(z),\quad =g(z)$$

もまた整関数で，これを $g(z)$ と書くとすれば式(10.16)を得る．ゆえに式

(10.16)は零点をもたない整関数の一般表現を与える．

次に，整関数 $f(z)$ が $z=0$ を除く有限個の零点

$$b_1, b_2, \cdots, b_m$$

をもつと仮定する．ここでは多重の零点はその多重度だけくり返して書かれているとする．このとき

$$f(z) \Big/ \prod_{k=1}^{m} \left(1-\frac{z}{b_k}\right)$$

は明らかに零点をもたない整関数である．ここで記号 $\prod_{k=1}^{m}$ は k が1から m までの m 個の積をとることを意味する．そのような関数は一般に式(10.16)の形に書けるはずだから

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{k=1}^{m} \left(1-\frac{z}{b_k}\right) \tag{10.17}$$

ここで $g(z)$ はある整関数である．$f(z)$ がもし除外されていた点 $z=0$ に多重度 p の零点をもつならば

$$f(z) = e^{g(z)} z^p \prod_{k=1}^{m} \left(1-\frac{z}{b_k}\right) \tag{10.18}$$

となる．

無限に多くの零点を $f(z)$ がもつときには，右辺は無限積となり，それには注意深い取り扱いが必要で，次節で考察する．積が収束するためには，因子に(新しい零点が現われないように)指数関数をかけることが必要になる場合がある．次の例がちょうどそれに相当する．

［例 2］　$\dfrac{d}{dz} \ln \dfrac{\sin z}{z} = \cot z - \dfrac{1}{z}$

の関係がある．右辺は式(10.9)によって無限級数で表わされる．それを $z=0$ (正則点である)から点 z まで項別に積分すると

$$\ln \frac{\sin z}{z} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left[\ln\left(1-\frac{z}{k\pi}\right) + \frac{z}{k\pi} \right]$$

ゆえに

$$\sin z = z \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left(1-\frac{z}{k\pi}\right) e^{\frac{z}{k\pi}} \tag{10.19}$$

ここで，$\prod'$ は $k=0$ の因子は除くことを意味する．さらに，k，$-k$ の因子を一組にまとめると

$$\sin z = z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right) \tag{10.20}$$

式(10.19)右辺の $e^{z/k\pi}$ という因子が無限積の収束を保証している．そのことは次節の考察で明瞭となろう．

10.2 無限積

無限数列 $\{z_n\}$ に対し

$$\prod_{k=1}^{\infty} z_k = z_1 z_2 z_3 \cdot\cdots \tag{10.21}$$

を無限積という．無限級数の場合と同様に，有限の積

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} z_k = z_1 z_2 \cdot\cdots z_n$$

を考え，n が限りなく増加したとき積 P_n がある有限の値に近づくならば，無限積(10.21)は収束するという．零因子を含む無限積は 0 に等しい．しかし，因子がいずれも 0 と異なっても，積の極限が 0 に等しくなる場合(例えば $z_n=1/n$)は除くことにする．このようにすれば，収束の場合は $n\to\infty$ で $z_n\to 1$ となることが必要である．また因子の中に 1 つでも 0 となるものがあれば，無限積は 0 となり，有限積と類似の性質をもたせることができる．

そこで，はじめから

$$z_n = 1+u_n, \qquad u_n\to 0 \quad (n\to\infty)$$

と仮定して，次の無限積を考察する：

$$P = (1+u_1)(1+u_2)\cdot\cdots(1+u_n)\cdot\cdots \tag{10.22}$$

定理　無限積(10.22)は

$$|u_1|+|u_2|+\cdot\cdots = \sum_{k=1}^{\infty}|u_k|$$

が収束するとき収束する．このとき $\prod_{k=1}^{\infty}(1+|u_n|)$ も収束するので，これを絶対収束という．もし因子の中に 0 がなければ，積は 0 にならない．し

かし，もし $u_n<0$ で $\sum_n u_n$ が発散のときには無限積(10,22)は 0 となる．

▶ $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|=\sigma$ とおこう．また，$p_n=(1+u_1)\cdot\cdots\cdot(1+u_n)$，

$$v_1=p_1,\quad v_n=p_n-p_{n-1}=(1+u_1)\cdot\cdots\cdot(1+u_{n-1})u_n=p_{n-1}u_n \qquad (n\geqq 2)$$

とおくと $p_n=v_1+v_2+\cdots\cdots+v_n$ となる．したがって p_n の収束は $\sum v_n$ の収束性に帰着する．$x>0$ に対し，$1+x<\mathrm{e}^x$ であること，および $|u_k|$ の総和が σ であることを使うと

$$|p_n|\leqq\prod_{k=1}^{n}(1+|u_k|)\leqq\prod_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{|u_k|}=\mathrm{e}^{\Sigma|u_k|}\leqq\mathrm{e}^{\sigma}$$

したがって

$$|v_n|=|p_{n-1}||u_n|\leqq\mathrm{e}^{\sigma}|u_n|$$

がなりたつ．ゆえに，$\sum|u_n|$ が収束すれば $\sum|v_n|$ も収束する．このとき $\sum v_n$ は絶対収束であり，$n\to\infty$ のとき p_n が有限値に収束することがいえる．

次に $0\leqq|x|<\dfrac{1}{2}$ のとき，不等式

$$\mathrm{e}^x\geqq 1+x\geqq\mathrm{e}^{-2|x|}$$

がなりたつことを使って後半の部分を示そう．$\sum|u_n|$ が収束することにより，ある番号(N とする)以上で $|u_n|<\dfrac{1}{2}$ となる．そのとき

$$\mathrm{e}^{\sum_N^M u_n}\geqq\left|\prod_{n=N}^{M}(1+u_n)\right|\geqq\mathrm{e}^{-2\sum_N^M|u_n|}>0$$

$M\to\infty$ の極限をとっても

$$\mathrm{e}^{\sum_N^\infty u_n}\geqq\left|\prod_{n=N}^{\infty}(1+u_n)\right|\geqq\mathrm{e}^{-2\sum_N^\infty|u_n|}>0 \qquad \text{(A)}$$

ゆえに，もし $\sum_N^\infty|u_n|$ が収束し，n が 1 から N 番までも $1+u_n\neq 0$ ならば

$$p=\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_n)\neq 0$$

となり，無限積は 0 となることはない．しかし，もし $u_n\to 0$ ではあるが，$u_n<0$ でかつ $\sum_n u_n$ が発散のときには，式(A)より無限積 P は 0 となる．

□

次に z の整関数を積因子とする無限積

$$P(z)=\prod_{k=1}^{\infty} u_k(z)=u_1(z)u_2(z)\cdots\cdots \tag{10.23}$$

を考える．いま z 面内に，原点を中心とした任意の半径 R の円 C_R をとる．R が与えられたとき，ある番号 K から先の $u_k(z)$ は C_R の中に零点はもたないと仮定する．そこで，式(10.23)の対数をとって

$$S(z)=\sum_{k=1}^{\infty} \ln u_k(z)=\sum_{k=1}^{K-1} \ln u_k(z)+\sum_{k=K}^{\infty} \ln u_k(z) \tag{10.24}$$

右辺の 2 番目の和において $u_k(z)$ $(k \geqq K)$ は C_R の中で 0 とならないことから，各項 $\ln u_k(z)$ は一価正則である．この級数が，もし C_R において一様収束するなら，その極限の和は正則関数を表わす(§5.5 の系 1(a))．これを $g(z)$ と書くと

$$P(z)=\mathrm{e}^{g(z)}\prod_{k=1}^{K-1} u_k(z) \tag{10.25}$$

を得る．これは C_R の中で正則であり，そこでの零点は $u_k(z)$ $(k=1,\cdots\cdots, K-1)$ の零点で与えられる．R は任意であったから，次の性質が得られる．

> z 平面の任意の有界領域で，級数(10.24)が一様収束するとき(特異点をもつ最初のいくつかの有限個の項は除くとする)，無限積(10.23)はすべての z(有限)で収束する．それは整関数で，その零点は因子 $u_k(z)$ の零点によって完全に決定される．

演習問題 10

1. 次のウォリス(Wallis)の公式を示せ：

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\cdots$$

2. 次の展開を求めよ．

(a) $\sec z=2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2-z^2}$, (b) $\csc z=\frac{1}{z}+2z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^2-n^2\pi^2}$

(c) $\tan z=2z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2-z^2}$

(d) $\frac{1}{\mathrm{e}^z-1}=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}+2z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^2+4\pi^2n^2}$

(e) $\csc^2 z=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n\pi)^2}$

3. 番号 k とともにすみやかに無限大となる数列 $\{a_k\}$ に対し，級数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|a_k|^m}$$

を収束させる正整数 $m(\geqq 2)$ があるとする．このとき，無限積

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)\mathrm{e}^{\frac{z}{a_k}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_k}\right)^2+\cdots+\frac{1}{m-1}\left(\frac{z}{a_k}\right)^{m-1}}$$

は z の有界領域で一様絶対収束し，$z=a_k$ において，そしてその点でのみ零となることを示せ［ワイエルシュトラスの無限積］．

4. 級数(10.24)が一様収束するとき，その微分は

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k'(z)}{u_k(z)}$$

で与えられる．このとき，無限積(10.23)の微分 $P'(z)$ はどのように与えられるか．

11. 等角写像

11.1 写　　像

2つの複素変数 z と w の間に，一価の正則関数 $f(z)$ によって

$$w=f(z) \tag{11.1}$$

の関係があるとき，w を関数 f による z の像(image)という．z 平面の領域Dの各点の像が，w 平面の領域Wを形成するとき，W は f によるDの像あるいは写像(mapping)といい，f：D→W あるいは f：$z \to w$ ($z \in$ D, $w \in$ W) と書く(図11.1)．写像では，各点 z に対し一意的に像 $w=f(z)$ が確定しなければならないが，各点 w に対し z は必ずしも一意とは限らない．もしDの2つ以上の点が同じ1つの w を像にもつときには，写像は多対一といわれる．

領域Wが領域Dの像であることはW$=f$(D)とも表わされる．逆に，DはWの逆像といわれD$=f^{-1}$(W)と書かれる．もし写像が多対一のときには，f^{-1} は厳密には写像とはならず単に記号とみなければならない．もし f(D)のすべての点が一意的な逆像をもつならば，写像 f は一対一(単に1-1)または単射といわれ，しかも f の逆写像 f^{-1} が存在する．

もし z のすべての点で w への写像が定義されているなら，z から w の中への写像(into-mapping)という．加えて，もし w のすべての点が逆像(一意とは

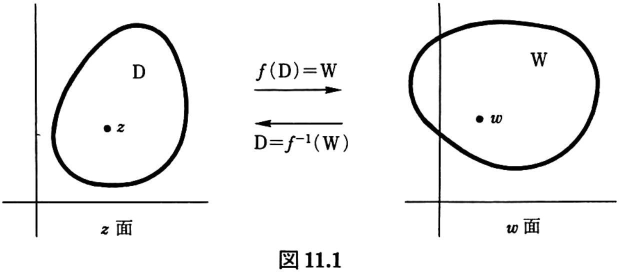


図11.1

かぎらない)を有するなら，z から w の上への写像(onto-mapping)，あるいは全射という．一対一かつ上への写像は全単射といわれる．正則関数(解析関数) $f(z)$ は無限回微分可能であるから，$f(z)$ は C^∞ (無限回微分可能な連続関数の族)に属し，写像は C^∞ 微分可能といわれる．

実区間 $[\alpha, \beta]$ の変数 t に対し(α, β は実数)，複素数値の関数 $\varphi(t)$ が微分可能とし，導関数 $\varphi'(t)$ は連続でかつ 0 にならないと仮定する．このとき

$$z \equiv \varphi(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [\alpha, \beta] \tag{11.2}$$

で表される区間 $[\alpha, \beta]$ の像 $z(t)$ は z 面でのなめらかな曲線となる(図 11.2)．t に関する微分

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t) = a(t)\,\mathrm{e}^{i\theta(t)}$$

は接線ベクトルを表わし，$\theta = \arg\varphi'(t)$ は接線の傾きを表わす．

関数 $f(z)$ が D の各点で正則とし，$z = \varphi(t)$ で与えられるなめらかな曲線 C が D に含まれるとき

$$[\alpha, \beta] \ni t \to z \equiv \varphi(t) \to w = f(\varphi(t)) = w(t) \tag{11.3}$$

で与えられる曲線 $w(t)$ は w 平面でのなめらかな曲線 Γ となる．というのは，$w'(t) = f'(\varphi(t))\varphi'(t)$ は w 面の接線ベクトルを表し，$f'(z) = 0$ となる点を除いて，$w'(t) \neq 0$ であるからである．いま，$z_0 = \varphi(t_0)$ に対し $f'(z_0) \neq 0$ とすると，$w'(t_0) \neq 0$ であり，点 $w_0 = f(\varphi(t_0))$ での曲線 Γ に対する接線の傾きは

$$\arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg\varphi'(t_0) \tag{11.4}$$

で与えられる．$f'(z_s) = 0$ となる点 z_s は写像の特異点であり，以下の項目 (§11.2 の **c** 項)で考察する．

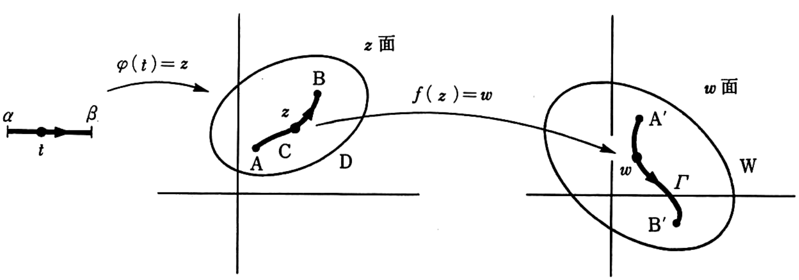


図 11.2

11.2 等角性・相似性・特異性

a. 等角性

点 z_0 を通る 2 つの曲線 C_1, C_2 が $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ で表わされ，その像 Γ_1, Γ_2 が $w_1(t)$, $w_2(t)$ とする．2 つの像曲線の交点 $w_0=f(z_0)$ において，Γ_2 の接線が Γ_1 の接線に対してなす角は，式(11.4)を使うと

$$\Delta\theta=\arg w_2'(t_0)-\arg w_1'(t_0)=\arg \varphi_2'(t)-\arg \varphi_1'(t_0) \tag{11.5}$$

で与えられる(図 11.3)．したがって，Γ_2 が Γ_1 に対してなす角と，C_2 が C_1 に対してなす角 $\arg \varphi_2'(t_0)-\arg \varphi_1'(t_0)$は，向きまで含めて等しい．これは式(11.4)において，$f'(z_0)$ が両曲線で共通だからである．すなわち，$w=f(z)$ による写像は，$f'(z_0)\neq 0$ なる点において等角性をもつ．像曲線は全体的に角度 $\arg f'(z_0)$だけ回転する．

b. 相似性

点 z_0 の近くに 2 つの点 z_1, z_2 をとり，その像をそれぞれ w_0, w_1, w_2 とすると，$f'(z_0)\neq 0$ のとき

$$w_1-w_0=f'(z_0)(z_1-z_0)[1+O(|z_1-z_0|)]$$
$$w_2-w_0=f'(z_0)(z_2-z_0)[1+O(|z_2-z_0|)]$$

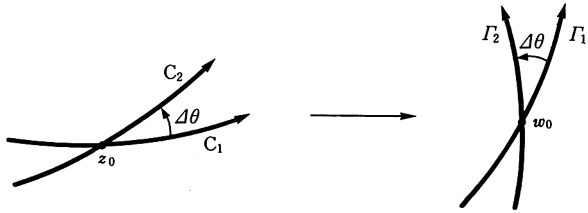
$$\therefore \quad \frac{w_1-w_0}{w_2-w_0}=\frac{z_1-z_0}{z_2-z_0}\quad[1+O(|z_1-z_0|,\ |z_2-z_0|)]$$

となる．したがって，2 つの三角形 $\Delta z_0 z_1 z_2$ と $\Delta w_0 w_1 w_2$ が十分小さいときは，両者は向きも含めて相似であり，$|f'(z_0)|$ はその相似比を与える(図 11.4)．

一価の正則関数 $f(z)$ を

$$w=f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y) \tag{11.6}$$

と書くと，x, y 面上の三角形が u, v 面上の三角形に写像される．それぞれの



arg $f'(z_0)$ だけ回転する

図 11.3

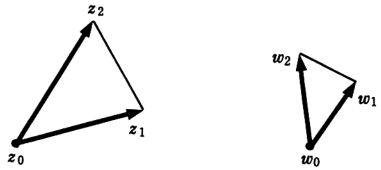


図 11.4　　相似比は $|f'(z_0)|$

面積を ΔA_{xy}, ΔA_{uv} とすると，その比 γ は

$$\gamma=\frac{\Delta A_{uv}}{\Delta A_{xy}}=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \tag{11.7}$$

で与えられる(演習問題 11 の 1)．これを変換(11.6)の関数行列式またはヤコビアン(Jacobian)という．

コーシー・リーマンの関係(3.13)を使うと，ヤコビアンは

$$\gamma=u_xv_y-u_yv_x=u_x{}^2+v_x{}^2=|f'(z)|^2$$

となり，これからも相似比が $|f'(z)|$ であることが示される．このことから，$f'(z_s)=0$ となる点 z_s は写像の特異点になることがわかる．

$u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ を解いて，$x=x(u,v)$. $y=y(u,v)$ を得るとき，これが式(11.6)の逆写像(逆変換)となる．関数 $x(u,v)$, $y(u,v)$ が一価でかつ連続的に微分可能(すなわち導関数が存在して連続)ならば

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1\Big/\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \tag{11.8}$$

である．ある点 z で $f'(z)\neq 0$，すなわちヤコビアン $\partial(u,v)/\partial(x,y)$ が 0 にならなければ，写像 f は z のある近傍の領域で 1 対 1 かつ上への写像となる．

c.　写像の特異点

導関数 $f'(z)$ が 0 となる点 z_s において，n 階導関数 $f^n(z_s)$ が最初にゼロでない導関数とする ($n\geqq 2$)．このとき

$$w-w_0=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n,\quad w_0=f(z_0)$$

$$\arg(w-w_0)=\arg f^{(n)}(z_0)+n\arg(z-z_0)$$

を得る．したがって **a** 項での議論を応用すると，z 面での線分のなす角は，w 面では n 倍に拡大される．$f'(z)=0$ である点のみならず，$f'(z)=\infty$ となる点

も写像の特異点であることはいうまでもない．

以上のような意味において，正則関数による写像は等角写像(conformal mapping)とよばれる．厳密にいうと，写像の性質は等角だけでないので共形写像とよばれることもある．$w=\bar{z}$ は等角であるが，向きを逆にする写像である．一般に $w=f(\bar{z})$ は第二種の等角写像といわれる．

11.3　等角写像の例

以下では a，b，c，d は与えられた複素定数，α，θ は実定数とする．

i) **並進**(平行移動)：$w=z+a$

この写像によって，z 面上の点 z は a だけ平行移動させられて w 面上に写像される．

ii) **回転**：$w=e^{i\theta}z$

この写像では，z 面内の図形は同じ角度 θ だけ回転させられて w 面に写像される．

iii) **伸縮**：$w=az$

$a>1$ なら，z 面内の図形は w 面で拡大，$a<1$ なら縮小する．

iv) **反転**：$w=1/z$

v) **線形変換**：$w=az+b$

vi) **1次分数変換(1次写像)**：$w=\dfrac{az+b}{cz+d}\quad(ad-bc\neq0)$　(11.9)

この変換は上の i)〜v)およびその組み合わせを含んでいる．

> **定理**　1次分数変換 vi)によって，z 面上の円は w 面上の円に写像される．ここで直線は半径が無限大の円と考える．

▶まず最初に

$$w=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cz+d)}=\lambda+\frac{\mu}{z+\nu} \tag{11.10}$$

と書き直す．ここで，$\lambda=a/c$，$\mu=(bc-ad)/c^2$，$\nu=d/c$ である．この変換は，まず並進 $\zeta=z+\nu$，次に反転 $\tau=1/\zeta$，次に伸縮 $\sigma=\mu\tau$，最後にまた並進 $w=\sigma+\lambda$ と4段階の変換($z\to\zeta\to\tau\to\sigma\to w$)の組み合わせとみることができる．

次に z 面の円の方程式を考える．A，C を正の実数($A>0$，$C>0$)，B を複素数とすると

$$Az\bar{z}+Bz+\bar{B}\bar{z}+C=0 \tag{11.11}$$

は円を表わしている．というのは，$z=x+iy$ とすると，この方程式は

$$A(x^2+y^2)+2(\mathrm{Re}\,B)x-2(\mathrm{Im}\,B)y+C=0$$

となり，この2次式は x，y 面内の円を表わすからである．円の方程式(11.11)を $w=1/z$ によって反転すると

$$Cw\bar{w}+\bar{B}w+B\bar{w}+A=0$$

となる．これもまた w 面の円の方程式である．こんどは式(11.11)を $w=az$ によって伸縮すると，$Aw\bar{w}+B\bar{a}w+\bar{B}a\bar{w}+Ca\bar{a}=0$ となり，やはり円を表わす．さらに，回転や並進によっても円は円に写像されることは明らかである．ゆえに，これらの変換を次々に行なうことと同等な1次分数変換(11.10)によって，z 面の円は w 面の円に写像される．$A=0$ とすると，式(11.11)は直線を表わす．　□

z 面上の4点 z_1，z_2，z_3，z_4 が，この1次分数変換 $w=(az+b)/(cz+d)$ によって，それぞれ w 面上の4点 w_1，w_2，w_3，w_4 に写されるとする．このとき

$$\frac{(z_4-z_1)(z_2-z_3)}{(z_4-z_3)(z_2-z_1)}=\frac{(w_4-w_1)(w_2-w_3)}{(w_4-w_3)(w_2-w_1)} \tag{11.12}$$

がなりたち，対応する比の値は不変である．この性質は，$i,k=1,\cdots,4$ に対し

$$w_i-w_k=\frac{az_i+b}{cz_i+d}-\frac{az_k+b}{cz_k+d}=(ad-bc)\frac{(z_i-z_k)}{(cz_i+d)(cz_k+d)}$$

という関係があることを使って直ちに示される．

vii) 関係(11.12)を用いると，z 面上の与えられた3点 z_1, z_2, z_3 を w 面上の与えられた3点 w_1，w_2，w_3 に写像する1次分数変換が

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

で与えられることがわかる．

viii) 上半面を単位円内に写す1次分数変換：

$$w=\mathrm{e}^{i\theta}\frac{z-a}{z-\bar{a}} \tag{11.13}$$

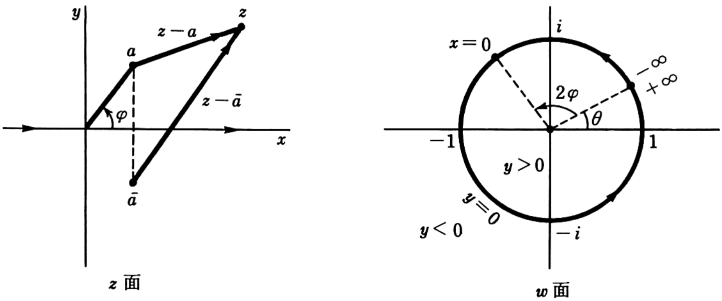


図 11.5

ここで，a は上半面内の点とする $(\mathrm{Im}\, a>0)$.

▶z 面の実軸上の点は，$z=x$ とおくとき

$$|w|=|\mathrm{e}^{i\theta}|\left|\frac{x-a}{x-\bar{a}}\right|=1$$

なので，w 面の単位円上に写像される(図 11.5)．点 z に対し，$z=x+iy$ と書き，さらに $a=\alpha+i\beta(\beta>0)$ とすると $(\arg a=\varphi)$，変換 (11.13) は

$$|w|^2=1-\frac{4\beta y}{|z-\bar{a}|^2}\geqq 0 \tag{11.14}$$

を与える．したがって，$y>0$ なら $|w|^2<1$，$y<0$ なら $|w|^2>1$ である．すなわち，上半面の点は単位円 $|w|^2=1$ の内部に，下半面の点はその外部に写像されることがわかる．導関数をみると

$$f'(z)=\mathrm{e}^{i\theta}\frac{a-\bar{a}}{(z-\bar{a})^2}\neq 0$$

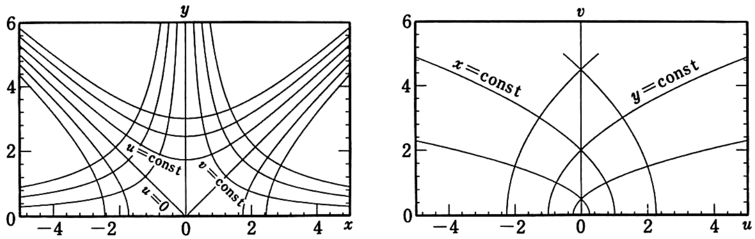
であるから，この写像は 1 対 1 である．特に $\theta=0$，$a=i$ とおくと，変換

$$w=\frac{z-i}{z+i} \tag{11.15}$$

は $z=i$ を w 面の原点に，$z=\pm\infty$ を $w=1$ に写像する．　□

ix）上半平面から全平面への写像：$w=z^2$

▶$z=r\mathrm{e}^{i\theta}$ とすると，$z^2=r^2\mathrm{e}^{i2\theta}$ であるから，z の全平面 $(0\leqq\theta<2\pi)$ は，w 平面では 2 葉のリーマン面 $(0\leqq 2\theta<4\pi)$ に写される．もし z 面の領域 D を上半面 $(0\leqq\theta<\pi)$ に限れば，w 面の領域 W は全平面 $(0\leqq 2\theta<2\pi)$ と



(a) z 面：$u=x^2-y^2=$const, $v=xy=$const　　(b) w 面：$x=$const, $y=$const

図 11.6

なる．2 葉のリーマン面で考えるときには原点 $w=0$ は分岐点であったが，写像で考えるときには $f'(z)=2z$ なので，原点 $z=0$ は写像の特異点である．しかしこの点は D の境界上に位置しているので，内部では 1 対 1 写像となっている．

$w=u+iv$ として実部と虚部に分けると，$w=(x+iy)^2=x^2-y^2+i2xy$ なので

$$u=x^2-y^2, \qquad v=2xy \tag{11.16}$$

となる．w 面で座標軸に平行な線の群 ($u=$const, $v=$const) は

$$x^2-y^2=u=\text{const} \qquad xy=\frac{1}{2}v=\text{const}$$

で与えられるので，z 面では直角双曲線の 2 つの群を表わす(図 11.6(a))．他方，式(11.16)で y あるいは x を消去すると，それぞれ

$$u=-\frac{1}{4x^2}v^2+x^2, \quad u=\frac{1}{4y^2}v^2-y^2$$

となるので，z 面で座標軸に平行な線の群 ($x=$const, $y=$const) は w 面では放物線の 2 つの群を表わす(図 11.6(b))．

x）円に関する鏡像の原理

関数 $f(z)$ が円 C の弧 AB の片側で正則で，弧 AB の上まで連続とする．さらに弧 AB は写像 $w=f(z)$ によって w 面の円 C_1 の弧 A_1B_1 に写像されるとする．まず，z の 1 次分数写像 $z_1=(az+b)/(cz+d)$ によって C を実軸上に写す．w の方も別の 1 次分数写像によって w_1 に写し，円 C_1 が同じ実軸上に写されたとする．このとき新しい関数 $f_1(z_1)$ が

$$w_1=f_1(z_1), \qquad w_1=(a'w+b')/(c'w+d')$$

によって得られる。この新しい関数 $f_1(z_1)$ は，実軸上のある区間 I の片側で正則で，この区間の上まで連続で，その上で実数値をとる．第 8 章のシュワルツの鏡像の原理(演習問題 8 の 3)によれば，この関数は区間 I を越えて解析接続され，実軸に関して対称な点では複素共役値をとる．変数 z および $w=f(z)$ に対して行なった 2 つの 1 次写像は，対称な点を対称な点に写すので(演習問題 11 の 3)，関数 $f(z)$ が円弧 AB を越えて解析接続され，円 C に関し対称な点では，円 C_1 に関し対称点(値)をとる．

11.4 シュワルツ・クリストッフェル変換

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=A(z-\alpha_1)^{\frac{\gamma_1}{\pi}-1}(z-\alpha_2)^{\frac{\gamma_2}{\pi}-1}\cdots\cdot(z-\alpha_n)^{\frac{\gamma_n}{\pi}-1} \tag{11.17}$$

すなわち

$$w=f(z)=A\int_{z_B}^{z}(z-\alpha_1)^{\frac{\gamma_1}{\pi}-1}\cdots\cdot(z-\alpha_n)^{\frac{\gamma_n}{\pi}-1}\mathrm{d}z+B \tag{11.18}$$

は z 面の上半面を w 面の n 多角形 P_n の内部に写像し，z 面の実軸が P_n の各辺に写像される(図 11.7)．ここで，w 面の n 多角形の頂点 $w_1, w_2, \cdots\cdot, w_n$ の内角を $\gamma_1, \gamma_2, \cdots\cdot, \gamma_n$ とし，各頂点は z 面の実軸上の点 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdot, \alpha_n$ に対応するものとし，$\alpha_1<\alpha_2<\cdots\cdot<\alpha_n$ と仮定する．また，多角形の性質から

$$\gamma_1+\gamma_2+\cdots\cdot+\gamma_n=(n-2)\pi \tag{11.19}$$

がなりたつ．写像(11.18)は z 面の上半面の点 z_B ($\mathrm{Im}\, z_B>0$) を w 面の点 B に写し，定数 A は一点 z_0 での導関数 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}z$ ($z=z_0$) の値を決めれば決

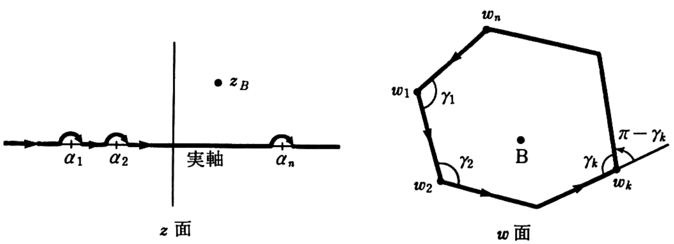


図 11.7

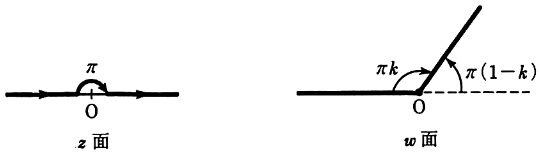


図 11.8

定される.

式(11.17)の意味をみるために，例として，正定数 k に対し

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=(\mathrm{e}^{-i\pi})^{k-1}z^{k-1} \rightarrow w(z)=\frac{\mathrm{e}^{i\pi(1-k)}}{k}z^k=f(z)$$

による写像を $z=0$ の近傍で考えてみる(図 11.8)．z が実軸上で負の側($z=r\mathrm{e}^{i\pi}$)にあるとき，$\arg w=\pi$ となるから w も実軸上で負の側にある．z が原点 O を通過するとき，上半面側を通ることにすると，$\arg z$ は π から 0 に変化するが，実軸上を進むときには，0 の左でも右でも $\arg(\mathrm{d}z)=0$ である．上の変換式では

$$\arg(\mathrm{d}w)=\arg(\mathrm{d}z)+\pi(1-k)+(k-1)\arg z$$

がなりたつから，z が原点 O を通って負側から正側に進むと，$\arg(\mathrm{d}w)$ は 0 から $\pi(1-k)$ となる．これは $f(z)$ の形からも明らかである．すなわち，z 面の内角は π なのに対し，w 面の内角は πk となる.

変換(11.17)についてみると

$$\arg \mathrm{d}w=\arg \mathrm{d}z+\arg A+\left(\frac{\gamma_1}{\pi}-1\right)\arg(z-\alpha_1)+\cdots\cdot$$
$$+\left(\frac{\gamma_n}{\pi}-1\right)\arg(z-\alpha_n)$$

と書ける．z が実軸上の点 α_k に左から近づくとき，w は多角形の一辺を w_k に向かって進むとする．z が α_k を通過する前後で $\arg(z-\alpha_k)$ は π から 0 へ変化するが，他の項は不変である．このとき $\arg \mathrm{d}w$ は $\pi-\gamma_k$ だけ増加するから，w 面上の点の動きは，点 w_k で角度 $(\pi-\gamma_k)$ だけ方向変化を示し，そこでの内角が γ_k であることを表わしている．点 w は頂点 $w_1,\cdots\cdot,w_n$ で合計 $n\pi-(\gamma_1+\cdots\cdot+\gamma_n)$ の角度変化をする．これは式 (11.19) より 2π に等しい．また $z\to\infty$ では，式(11.18)はやはり式(11.19)を考慮すると

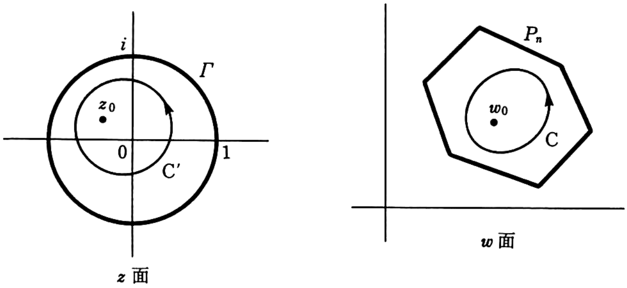


図 11.9

$$w=A\int^{z}\left[\frac{1}{z^2}+O\left(\frac{1}{z^3}\right)\right]\mathrm{d}z+B=\text{定数}-\frac{A}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

となり，無限遠点は正則点であることがわかる．

前節の viii) で上半面を単位円に写像する関数を示した．これら 2 つの写像を続けておこなえば，z 面の単位円 Γ が w 面の多角形 P_n に写像される変換が得られる（図 11.9）．

11.5 リーマンの写像定理

前節で，写像関数の例をいくつかみてきた．こんどは，z 面上に任意に与えられた単連結領域 D を w 面の単位円の内部に等角写像する関数について考えてみる．単連結領域については，等角写像の基本定理ともいえるリーマンの写像定理がある．この定理では，境界がただ 1 点の単連結領域および無限遠点を含む全平面の場合は除外される．

リーマンの写像定理

D は z 面の単連結領域で，上に除外したいずれの場合でもないとする．このとき，領域 D を単位円の内部 $|w|<1$ に等角写像する 3 パラメータの写像関数が存在する．

写像関数 $w=f(z)$ は，次の i)，ii)，iii) いずれの場合でも，3 つの独立な実数の条件によって一意的に決定される：

i) D 内の任意の点 z_0 を原点 $w=0$ に写し，$z=z_0$ での任意の方向を $w=0$ での正実軸の方向に写像する．

ii）D 内の任意の点 z_0 を原点 $w=0$ に写し，D の境界上の一点 z_1 を単位円 $|w|=1$ 上の与えられた点 w_1 に写す．

iii）D の境界上の 3 点 z_1, z_2, z_3 を単位円 $|w|=1$ 上の任意の 3 点に同じ順序で写す．

ここでは定理を述べるだけにとどめる．詳細に興味のある読者には巻末の文献 4, 7) が参考となろう．

z 面の任意の 2 つの単連結領域 D_1, D_2 が，リーマンの定理によって同じ単位円に写像される．また単位円は 1 次分数変換（§ 11.3 の **vi**) 項）によってやはり単位円に写される．このようにして，任意の 2 つの単連結領域 D_1, D_2 は互いに他に写される．リーマンの定理は写像関数の存在を保証してはいるが，その変換を見つけるのにはあまり役に立ちそうもない．

11.6　等角写像の応用

流体力学や電磁気学への応用について述べよう．

A.　流体力学への応用

非圧縮性の完全流体の 2 次元的流れを考えよう．流体の速度 $\boldsymbol{v}(v_x, v_y)$ は時刻 t にはよらず，座標 (x, y) だけの関数とする．このような流れは定常流といわれる．非圧縮の流れの速度は，流れの関数 $\psi(x, y)$ を用いて

$$v_x=\frac{\partial\psi}{\partial y},\qquad v_y=-\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{11.20}$$

によって表わすことができる．実際，この表式によって $\operatorname{div}\boldsymbol{v}=\partial v_x/\partial x+\partial v_y/\partial y=0$ となることは直ちに示される．逆に，2 つの関数 $v_x(x, y)$, $v_y(x, y)$ が領域 R で $\partial v_x/\partial x+\partial v_y/\partial y=0$ を恒等的に満たすとする．ここでグリーンの定理 (4.28) を思い起こそう．その公式で $Q=v_x$, $P=-v_y$ とおくと，式 (4.28) の右辺は恒等的に 0 になるので

$$\oint_{\mathrm{C}}(-v_y\,\mathrm{d}x+v_x\,\mathrm{d}y)=0$$

が R の任意の閉曲線 C に対してなりたつ．このとき，§ 4.1 の系 1，系 2 と同様の考察によって，定点 0 から動点 $P(x, y)$ に向かう曲線に沿っての線積分

$$\psi(x, y)=\int_0^{(x,y)}(-v_y\mathrm{d}x+v_x\mathrm{d}y)$$

は端点 (x, y)だけの関数となり，その微分は $\mathrm{d}\psi=-v_y\mathrm{d}x+v_x\mathrm{d}y$ と表わせるから，式(11.20)が導かれる．$\psi(x, y)$=定数という関係は x，y 面上のある曲線を表わすが，この上では $\mathrm{d}\psi=0$ であるから，$\mathrm{d}x/v_x=\mathrm{d}y/v_y$ を満足する．これは ψ=一定の線が流線を表わすことを意味している．

この定常流が速度ポテンシャル $\phi(x, y)$ をもち，度速成分が

$$v_x=\frac{\partial\phi}{\partial x},\qquad v_y=\frac{\partial\phi}{\partial y} \tag{11.21}$$

と表わせると仮定する．この場合，$\partial v_y/\partial x-\partial v_x/\partial y=0$ が常に満たされる．このような流れは**渦なし**とよばれる．この場合も式(4.28)で，$Q=v_y$，$P=v_x$ とおけば，右辺は恒等的に消えるので，$\psi(x, y)$ のときと同様に，積分

$$\int_0^{(x,y)}(v_x\mathrm{d}x+v_y\mathrm{d}y)$$

が終点 (x, y) だけの関数となる．これを $\phi(x, y)$ とおけば，$\mathrm{d}\phi=v_x\mathrm{d}x+v_y\mathrm{d}y$ となるから，式(11.21)が導かれる．

いま，2 次元平面 (x, y) に非圧縮でかつ渦なしの定常流があるとすると，式(11.20)，(11.21)より

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\qquad \frac{\partial\phi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{11.22}$$

がなりたつ．これは，コーシー・リーマンの方程式(3.15)そのものである．したがって，変数 $z=x+iy$ の関数

$$f(z)=\phi(x, y)+i\psi(x, y) \tag{11.23}$$

は正則関数を表わす．この導関数は

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}=\phi_x+i\psi_x=v_x-iv_y \tag{11.24}$$

となるので，これは複素速度(v_x+iv_y の複素共役)といわれる．この意味で関数 $f(z)$ は複素(速度)ポテンシャルとよばれる．速度の大きさは $|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_x{}^2+v_y{}^2}=|f'(z)|$ で与えられる．

ここに示された事実は，**任意の正則関数(解析関数)がある非圧縮で渦なしの**

流れを表現する，という注目すべき性質を述べている．そこで，物体のまわりの流れを複素関数を使って考えてみよう．

まず，最も簡単な関数 Uz (U は実定数)をとると，その導関数は U となり，式(11.24)から $v_x=U$，$v_y=0$ を得る．これは x 方向の速度が至るところ U の**一様流**を表わしている．このような流れの中に物体Bをおくとき，Bの近くでは $\mathrm{d}f/\mathrm{d}z$ は U から大きくずれるであろうが，Bから十分離れた点では U に近づくであろう．そこで，この流れの複素ポテンシャルを

$$f(z)=Uz+g(z)$$

と書く．ここで $|z|\to\infty$ のとき $|g(z)|\to 0$ と仮定する．例えば $g(z)=A/z$ はこの条件を満たす最も簡単な関数である(A は定数)．

[**例** 1] 一様流の中の円柱

複素ポテンシャル

$$f(z)=U\left(z+\frac{a^2}{z}\right) \qquad (a \text{ は正定数}) \tag{11.25}$$

はどのような流れの場を表わしているかをみてみよう．$z=r\mathrm{e}^{i\theta}$ とおくと

$$\begin{aligned} f(z)=\phi+i\psi &= U\left(r\mathrm{e}^{i\theta}+\frac{a^2}{r}\mathrm{e}^{-i\theta}\right) \\ &= U\left(r+\frac{a^2}{r}\right)\cos\theta+iU\left(r-\frac{a^2}{r}\right)\sin\theta \end{aligned}$$

であるから，速度ポテンシャル ϕ，流れの関数 ψ は

$$\phi=U\left(r+\frac{a^2}{r}\right)\cos\theta,\quad \psi=U\left(r-\frac{a^2}{r}\right)\sin\theta \tag{11.26}$$

となる．前に示したように，流線は $\psi(r,\theta)=\alpha$(定数)，すなわち

$$U\left(r-\frac{a^2}{r}\right)\sin\theta=\alpha$$

によって与えられる．特に $\alpha=0$ とすると，$r=a$ あるいは $\sin\theta=0$(すなわち，$\theta=0$ または π)を得る．これらは円 $r=a$ に沿って流れる流線とそれにつながる流線(AS，S'B)を表わしている(図 11.10)．$\alpha\neq 0$ の表わす流線は円をさけて回る流れを表現している．他方

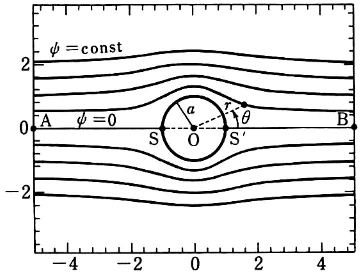


図 11.10　円柱のまわりの流れの流線($\psi(r,\theta)$=const)

$$\phi=U\left(r+\frac{a^2}{r}\right)\cos\theta=\beta\quad（定数）$$

は等ポテンシャル線群を表わす．$\psi(r,\theta)=\alpha$，$\phi(r,\theta)=\beta$ の曲線群は各点で直交している．というのは，$w=\phi+i\psi$ 面でみると，$\psi=\alpha$，$\phi=\beta$ は明らかに直交する直線群を表わしており，上記の曲線群はこれらを等角写像 $f^{-1}(w)$ で z 面に写像したものであるからである($w=f(z)$ の逆写像)．

各点の速度場は，式(11.24)より

$$v_x-iv_y=f'(z)=U\left(1-\frac{a^2}{z^2}\right)=U\left(1-\frac{a^2}{r^2}\cos 2\theta\right)+iU\frac{a^2}{r^2}\sin 2\theta$$

$$|v|=\sqrt{v_x{}^2+v_y{}^2}=U\sqrt{1-\frac{2a^2}{r^2}\cos 2\theta+\frac{a^4}{r^4}}$$

で表わされる．確かに $|z|\to\infty$ のとき，$v_x\to U$，$v_y\to 0$ となっている．$f'(z)=0$ となる点はよどみ点とよばれる．上式より $z=\pm a$ がそのような点であることがわかる(図の S, S')．円の外 ($r\geqq a$) で速度が最大となるのは $\theta=\pi/2$ および $3\pi/2$，$r=a$ で表わされる点である．

ところで，変換

$$w=z+\frac{a^2}{z}\tag{11.27}$$

によって z 面から w 面に移ると，$f=Uw$ であるから $\mathrm{d}f/\mathrm{d}w=U$ となり，これは w 面の一様流を表わす．この写像では z 面の半径 a の円 $z=ae^{i\theta}$ は，w 面では

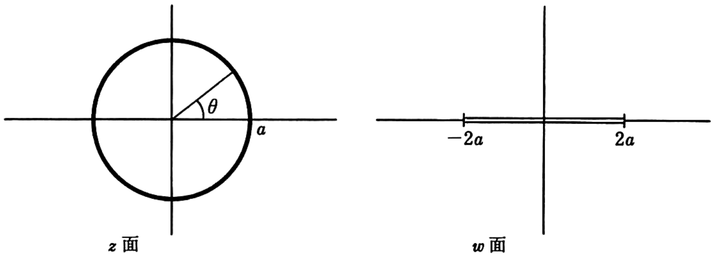


図 11.11

$$w = a(\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}) = 2a\cos\theta$$

となって，w 面の実軸の区間 $[-2a,\ 2a]$ に 2 重に写される(図 11.11)．$\mathrm{d}w/\mathrm{d}z = 1 - a^2/z^2$ は $z = \pm a$ で 0 となるから，これらの点は写像の特異点である．この写像によって，z 面の円 $r = a$ の外部は w 面の実軸区間 $[-2a,\ 2a]$ にカットの入った全平面に写される．この写像は 2：1 で，円の内部もやはり同じカットの入った全平面に写される．変換(11.27)はジューコフスキー(Joukowski)変換といわれる．

B.　2 次元の静電場

2 次元の静電場 $\boldsymbol{E} = (E_x, E_y)$ は，静電ポテンシャル $\phi(x, y)$ によって

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x}, \qquad E_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \tag{11.28}$$

と表わせる．場が 2 次元的というのは，(x, y)面に直角な第 3 軸方向の座標には場が依存しないという意味である．x，y 面内の点 P における点電荷とは，したがって P を通る x，y 面に垂直な直線上に一様に電荷が分布していることを表わす．そのとき電荷 q とは，その直線の単位長さ当たりの電荷量である．x，y 面の単位面積当たりの電荷密度を Q とすると，ガウスの定理より $\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = 4\pi Q$ である．電荷のない空間では，電場 $\boldsymbol{E}$ は

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = \frac{\partial}{\partial x}E_x + \frac{\partial}{\partial y}E_y = 0$$

を満足する．前項 **A** の流体力学への応用でも示したように，このときある関数 $\psi(x, y)$ が存在して，$E_x = -\partial\psi/\partial y$，$E_y = \partial\psi/\partial x$ と表せる．以下に示すように，$\psi(x, y)$ は力線の関数である．このようにして，**A** 項の場合と全く同様にして，

2次元の静電場は，電荷のない自由空間では，正則関数 $f(z)=\phi+i\psi$ で表わされる．$f(z)$ はやはり複素ポテンシャルとよぶ．逆に，正則関数はすべて，ある2次元静電場を表わす．その導関数は

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}=\phi_x+i\,\psi_x=-E_x+i\,E_y$$

を表わす．等ポテンシャル面は

$$\phi(x,y)=\beta$$

によって，またそれと直交する力線は $\psi(x,y)=\alpha$ によって与えられる．後者については，ψ＝一定のとき

$$\mathrm{d}\psi=\psi_x\mathrm{d}x+\psi_y\mathrm{d}y=E_y\mathrm{d}x-E_x\mathrm{d}y=0$$

となって，これは力線の方程式 $\mathrm{d}x/E_x=\mathrm{d}y/E_y$ を表わすからである．

［例 2］　点電荷

複素ポテンシャル

$$f(z)=-2\,q\ln z \tag{11.29}$$

はどのような場を表わすかをみてみよう．$z=r\mathrm{e}^{i\theta}$ とおくと

$$f(z)=\phi+i\,\psi=-2\,q\ln r-i\,2\,q\theta$$

したがって，電気力線は $\psi=-2\,q\theta$＝一定で与えられる．すなわち，電気力線は原点からのびる放射状の半直線 θ＝一定で表わされる．

静電ポテンシャルは $\phi=-2\,q\ln r$ なので，電場ベクトルは動径成分のみをもつ：

$$E_r=-\frac{\partial\phi}{\partial r}=\frac{2\,q}{r},\qquad E_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}=0$$

これは，原点に点電荷が存在することを示している（原点以外は $f(z)$ が正則なので，電荷は0である）．ガウスの定理により，原点の荷電量 Q は

$$Q=\frac{1}{4\,\pi}\oint_{\mathrm{C}}E_r\,r\mathrm{d}\theta$$

で与えられる．ここでCは原点を一周する（任意の）半径 r の円である．上の E_r を代入すると $Q=q$ を得る．このようにして，複素ポテンシャル(11.29)は原点の電荷 q による静電場を表わすことがわかる．

原点の代わりに点 z_0 に電荷 q があるときには，z を $z-z_0$ でおき換えて

$$f(z)=-2q\ln(z-z_0)$$

を得る．次に，複素共役の点 $\bar{z}_0$ に電荷 $-q$ があるとすると，その複素ポテンシャルは

$$f(z)=2q\ln(z-\bar{z}_0)$$

と表わせる．もし，これら2つの電荷が同時に存在するとすると，その複素ポテンシャルは，重ね合わせによって

$$f(z)=-2q\ln(z-z_0)+2q\ln(z-\bar{z}_0)=2q\ln\frac{z-\bar{z}_0}{z-z_0} \tag{11.30}$$

で表わされる．このときの静電ポテンシャル ϕ および力線関数 ψ は

$$\phi=2q\ln\left|\frac{z-\bar{z}_0}{z-z_0}\right|, \qquad \psi=2q\arg\left(\frac{z-\bar{z}_0}{z-z_0}\right)$$

で与えられる．したがって，等ポテンシャル線は

$$\left|\frac{z-\bar{z}_0}{z-z_0}\right|=\alpha \quad (定数) \tag{11.31}$$

で表わされる．これは2点 z_0 と $\bar{z}_0$ を対称点とするアポロニウスの円群を表わす(2点 z_0, $\bar{z}_0$ からの距離の比が一定の点の軌跡A(例えば)；図11.12)．定数 α は，図8.6の円Cについては $\sqrt{r_2/r_1}$ という比に相当する(対称点は P_1，P_2)．一方，力線は

$$\arg\frac{z-\bar{z}_0}{z-z_0}=\beta \quad (定数) \tag{11.32}$$

で与えられる．これらは点 z_0 と $\bar{z}_0$ を通る一群の円Bを表わし，式(11.31)の表わすアポロニウスの円群と直交する．

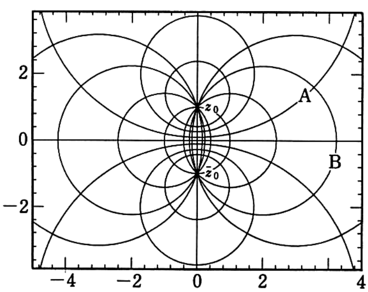


図11.12　等ポテンシャル線Aと力線B

演習問題 11

1. 変換 $u(x,y)$, $v(x,y)$ による，x，y 面，u，v 面の微小面積の比がヤコビアン(11.7)で与えられることを示せ.
2. 上半面 $\mathrm{Im}\,z>0$ を w 面の領域 $[0<\mathrm{Im}\,w<\pi,\ 0<\mathrm{Re}\,w<\infty]$ に写像する関数を求めよ(図 11.13).

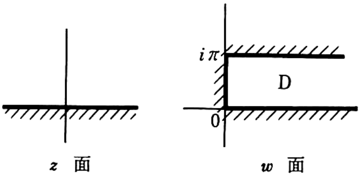


図 11.13

3. 1次分数写像

$$w=\frac{az+b}{cz+d} \qquad (ad \neq bc)$$

が z 面の円 C を w 面の円 γ に写すとき，円 C に関し互いに鏡像の位置にある 2 点は，それぞれ円 γ に関し互いに鏡像の位置に写されることを証明せよ.

4. 等ポテンシャル線(11.31)，力線(11.32)が円を表わすことを示せ.
5. 2次元静電場を表す次の複素ポテンシャル

$$f(z)=\frac{1}{i}\left(z+\frac{R^2}{z}\right) \qquad (|z| \geqq R,\ R：正定数)$$

はどのような電位分布，電荷分布を表すか．また等ポテンシャル線，電気力線はどのような曲線か.

12. Γ 関数，B 関数，ζ 関数

特殊関数とよばれる一群の関数の中で，ここで特に Γ（ガンマ）関数，B（ベータ）関数，ζ（ツェータ）関数について考察し，複素関数論の典型的な応用例を示そう．

12.1 ガンマ関数（Γ 関数）

次の積分

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t \quad (\mathrm{Re}\,z>0) \quad (\text{オイラーの公式}) \tag{12.1}$$

で定義される $z=x+iy$ の関数 $\Gamma(z)$ を Γ 関数という．右辺の積分は，$|t^{z-1}|=t^{x-1}$ を用いると

$$\left|\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t\right| \leqq \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t=\left[\int_0^{c}+\int_c^{\infty}\right]\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t \tag{12.2}$$

と評価できる（c は正定数）．右辺の実積分は $x>0$ のとき収束する．というのは，区間 $[c,\infty]$ での積分は任意の実数 x で収束するが，区間 $[0,\ c]$ の下限 $t=0$ では積分が収束するためには $x=\mathrm{Re}\,z>0$ が必要で，任意の $\varepsilon>0$ に対し $\mathrm{Re}\,z\geq\varepsilon$ で積分は一様収束する．式(5.25)の積分を無限区間に拡張した定理により（第5章系2），式(12.1)は $\mathrm{Re}\,z>0$ で正則である．しかし，$\Gamma(z)$ は $\mathrm{Re}\,z<0$ の領域へ解析接続することができる．z について微分すると

$$\Gamma'(z)=\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\ln t\,\mathrm{d}t \tag{12.3}$$

ここで $t^{z-1}=e^{(z-1)\ln t}$ の関係を使った．この積分も $\mathrm{Re}\,z>0$ で収束する．これからも $\Gamma(z)$ の正則性がいえる．式(12.1)の積分を部分積分すると

$$\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt = \left[\frac{1}{z}e^{-t}t^z\right]_0^{\infty} + \frac{1}{z}\int_0^{\infty} e^{-t}t^z dt$$

第1項は消えるから

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\Gamma(z+1) \tag{12.4}$$

を得る．ここで，上の考察を適用すると，右辺の積分は $\mathrm{Re}\,z>-1$ で収束する．したがって，$\Gamma(z)$ は $z=0$ を除く $\mathrm{Re}\,z>-1$ の領域で正則である．また $\Gamma(1)=\int_0^{\infty} e^{-t}dt=1$ であることを使うと，自然数 n に対して，式(12.4)より

$$\Gamma(n+1)=n! \qquad (0!=1) \tag{12.5}$$

が得られる．また $\Gamma(z)=\Gamma(z+1)/z$ の関係をくり返し使うと

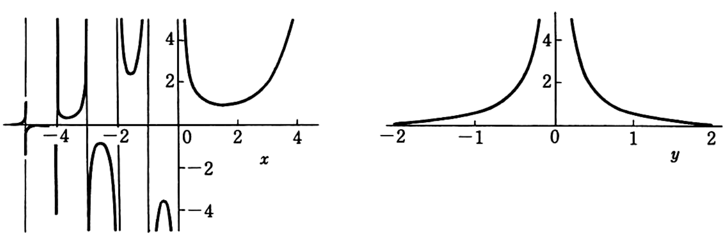
$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdot\cdots\cdot(z+n)} \tag{12.6}$$

も直ちに得られる．ところで，$\Gamma(z+n+1)$ は $\mathrm{Re}\,z>-n-1$ で正則であるから，それによって定義されている上式の $\Gamma(z)$ も同じ領域に解析接続される．ただし，上式から明らかなように，$z=0, -1, -2, \cdots, -n$ は1位の極となる(図12.1)．それは，分子の $\Gamma(z+n+1)$ がそれらの点で正則だからである．このようにして，$z=0$ および負整数の点を除いて，$\Gamma(z)$ は全平面に解析接続されることがわかる．$z=-n$ における留数は

$$\lim_{z\to -n}(z+n)\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!} \tag{12.7}$$

で与えられる．

Γ関数は径路積分によっても定義される：



(a) 実軸上での $\Gamma(x)$　　(b) 虚軸上での $|\Gamma(iy)|$

図12.1

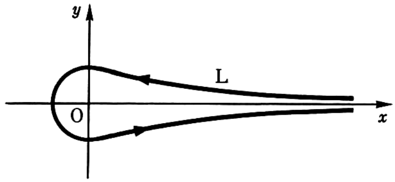


図 12.2　積分路 L

$$\Gamma(z) = -\frac{1}{2i\sin\pi z}\int_{\mathrm{L}} \mathrm{e}^{-t}(\mathrm{e}^{-i\pi}t)^{z-1}\mathrm{d}t \qquad (z \neq \text{整数}) \tag{12.8}$$

ここで，積分路 L は実軸上 $+\infty$ から偏角 0 で出て，原点を正の向きに一周し，偏角 2π で再び $+\infty$ にもどる径路である(図 12.2)．このような径路積分による定義はハンケル(Hankel)表示とよばれる．積分 $\int_{\mathrm{L}}$ を修正して

$$\int_{\mathrm{L}} = \int_{\infty\,(\arg t=0)}^{0} + \int_{(0+)} + \int_{0\,(\arg t=2\pi)}^{\infty}$$

としてみる．第 1 の偏角 0 の実軸上積分は $\mathrm{e}^{-i\pi z}\Gamma(z)$ を与え，第 3 の偏角 2π の積分は $-\mathrm{e}^{i\pi z}\Gamma(z)$ を与える．ここで $\Gamma(z)$ は定義(12.1)の形である．第 2 項の原点を正の向きに回る円周上の積分は半径 $\to 0$ の極限で消える．したがって，$\mathrm{Re}\,z > 0$ のときには，式(12.8)の右辺が式(12.1)と等しいことが示される：

$$-\frac{1}{2i\sin\pi z}(\mathrm{e}^{-i\pi z} - \mathrm{e}^{i\pi z})\,\Gamma(z) = \Gamma(z)$$

(積分の中の $\mathrm{e}^{-i\pi}t$ は $-t$ とも書ける)．しかし重要なのは，式(12.8)は整数の z を除くすべての点 z で解析的な関数 $\Gamma(z)$ を定義する点である．正整数の z については式(12.8)が式(12.1)と一致することから，除きうる特異点である．

無限積による $\Gamma(z)$ の定義については 2 つの形がある．第 1 は

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^{z}}{z(z+1)\cdot\cdots\cdot(z+n)} \\ &= \frac{1}{z}\prod_{k=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^{z}\Big/\left(1+\frac{z}{k}\right)\right] \quad (\text{オイラーの無限積})\end{aligned} \tag{12.9}$$

である．第 2 の形を得る前に，オイラー・マシェロニ(Euler-Mascheroni)定数 γ を定義しよう：

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{2}+\cdots\cdot+\frac{1}{n}-\ln n\right] = 0.5772156649\cdots\cdots \tag{12.10}$$

(演習問題1の13参照)．[　] の中は積分の形にすることができる：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\int_0^\infty e^{-kt}dt=\int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-(n+1)t}}{1-e^{-t}}dt$$

$$\ln n=\int_1^n dx\int_0^\infty e^{-xt}dt=\int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-nt}}{t}dt$$

したがって，$n\to\infty$ とすると

$$\gamma=\int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)dt \tag{12.11}$$

式(12.9)の逆数をとり，さらに式(12.10)を用いると($n^z=e^{z\ln n}$ より)

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\lim_{n\to\infty}\left[z\left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdots\cdot\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z\ln n}\right]$$

$$=ze^{\gamma z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{1}{k}z} \quad \text{（ワイエルシュトラスの無限積）} \tag{12.12}$$

この無限積は，演習問題10の3によって z の有界領域で一様絶対収束し，したがって $1/\Gamma(z)$ は整関数であり，$z=-k$ ($k=0,1,2,\cdots\cdot$) に1位の零をもつ．$1/\Gamma(z)$ が極をもたないことから，$\Gamma(z)$ は零点をもたない．

この無限積表示と $\sin z$ の無限積表示(10.20)を比べれば

$$\Gamma(z)\Gamma(-z)=-\pi/(z\sin\pi z) \tag{12.13}$$

がなりたつことがわかる．さらに，$\Gamma(-z)=-\Gamma(1-z)/z$ の関係を使うと

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z} \tag{12.14}$$

を得る．この式で $z=1/2$ とすると，$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ を得る．

式(12.8)で $\zeta=e^{-i\pi}t=-t$ とおくと

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2i\sin\pi z}\int_M e^{\zeta}\zeta^{z-1}d\zeta \tag{12.15}$$

となる．ここで積分路Mは実軸上 $-\infty$ から出発して，原点を反時計まわりに回り，$-\infty$ にもどる(図12.3)．ここで，式(12.14)から，$\Gamma(z)\sin\pi z=\pi/\Gamma(1-z)$ の関係を使うと

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_L e^{\zeta}\zeta^{-z}d\zeta \tag{12.16}$$

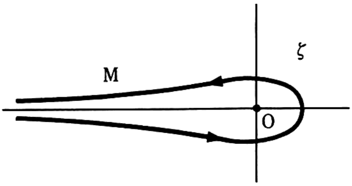


図 12.3 積分路 M

が得られる．

ψ(プサイ)関数は

$$\psi(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln\Gamma(z) \tag{12.17}$$

で定義される．これは $z=0, -1, -2, \cdots$ に1位の極をもつ有理形関数で，それらの極での留数は -1 である(演習問題 12 の 6 参照)．

12.2 ベータ関数(B 関数)

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x \quad (\mathrm{Re}\,p>0,\ \mathrm{Re}\,q>0) \tag{12.18}$$

で定義される関数を B (ベータ)関数という．$x=1-t$ としてみればすぐわかるように，$B(p,q)=B(q,p)$ である．$B(p,q+1)$ を定義する式を部分積分すれば

$$pB(p,q+1)=qB(p+1,q) \tag{12.19}$$

を示すことができる．式(12.18)で $x=\sin^2\theta$ とすると

$$B(p,q)=2\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}\mathrm{d}\theta \tag{12.20}$$

$x=t^2$ とおくと

$$B(p,q)=2\int_0^1 t^{2p-1}(1-t^2)^{q-1}\mathrm{d}t \tag{12.21}$$

また，$x=t/(1+t)$ とすると

$$B(p,q)=\int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\mathrm{d}t \tag{12.22}$$

積 $\Gamma(p)\Gamma(q)$ の各項を定義式 (12.1) で表わし，若干の積分計算を行なえば，次の関係式

$$B(p, q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{12.23}$$

を示すことができる(演習問題 12 の 7)．この式で $p=z$，$q=1-z$ とおくと

$$B(z, 1-z)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}{\Gamma(1)}=\frac{\pi}{\sin \pi z} \tag{12.24}$$

を得る．2 番目の等式では式(12.14)を使った．さらに式(12.22)から

$$B(z, 1-z)=\int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin \pi z} \tag{12.25}$$

を得る．これは式(9.6)の a の複素面への解析接続になっている．

Γ 関数の場合と同様に，$\mathrm{Re}\,p>0$，$\mathrm{Re}\,q>0$ で定義された $B(p, q)$ は径路積分表示によって，複素 p，q 面の全域に解析接続できる．それを与えるのが次のポッホハンマー(Pochhammer)の積分表示である：

$$B(p, q)=\frac{-\mathrm{e}^{-i\pi(p+q)}}{4\sin \pi p \sin \pi q}\int_{\mathrm{C}} t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t \tag{12.26}$$

ただし，整数の p，q は除く．また径路 C は図 12.4 のような径路である．図のたすきがけの径路 C を一回りすると被積分関数はもとの値にもどる．径路 C を実軸上に縮退させると，$\mathrm{Re}\,p>0$, $\mathrm{Re}\,q>0$ のときには，式(12.26)は式(12.18)に一致する(演習問題 12 の 8)．

上の積分表示は，C 上に特異点はなく，C の長さは有限であるから，積分は収束する．したがって，これは式(12.18)の解析接続になっている．

12.3 ツェータ関数(ζ 関数)

リーマンの ζ 関数は

$$\zeta(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^z}=1+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\cdots\cdot \quad (\mathrm{Re}\,z>1) \tag{12.27}$$

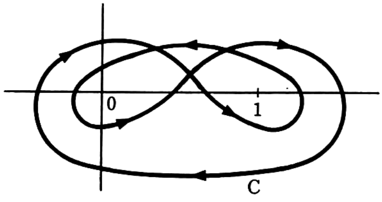


図 12.4

によって定義される(ワイエルシュトラスの ζ 関数とは無関係)．これは任意の正数 ε に対し，$\mathrm{Re}\,z \geqq 1+\varepsilon$ で一様に収束することから，$\mathrm{Re}\,z>1$ で正則である(演習問題 2 の 6 参照)．$\mathrm{Re}\,z>1$ の領域で

$$\int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t-1}\mathrm{d}t=\int_0^\infty t^{z-1}\sum_{k=1}^\infty \mathrm{e}^{-kt}\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^\infty k^{-z}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}s^{z-1}\mathrm{d}s=\zeta(z)\Gamma(z)$$

がなりたつから

$$\zeta(z)=\frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t-1}\mathrm{d}t \quad (\mathrm{Re}\,z>1) \tag{12.28}$$

と書ける．全平面への解析接続は，次の径路積分によって与えられる：

$$\zeta(z)=\frac{i}{2\pi}\Gamma(1-z)\int_{\mathrm{L}'}\frac{(-t)^{z-1}}{\mathrm{e}^t-1}\mathrm{d}t \tag{12.29}$$

ここで，径路 L′ は図 12.2 の L と同じ形であるが，L′ の場合は虚軸をきる点は $2\pi>y>0$, $0>y>-2\pi$ にあるものとする．というのは，$t=i2\pi k\,(k=\pm1, \pm2, \cdots)$ が被積分関数の極となるからである．

積分の前にある $\Gamma(1-z)$ のために，$z=1, 2, 3, \cdots$ が極となりそうであるが，実は $z=1$ だけが真の極で，他は除きうる特異点である．実際，$z=1$ とすると

$$\int_{\mathrm{L}'}\frac{(-t)^{z-1}}{\mathrm{e}^t-1}\mathrm{d}t=\int_{\mathrm{L}'}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t-1}=2\pi i \quad (t=0\text{ が 1 位の極})$$

なので，$z=1$ の近くで

$$\zeta(z)=\frac{i}{2\pi}\Gamma(1-z)[2\pi i+O(|1-z|)]=\frac{1}{z-1}+O(1)$$

となり，$z=1$ は 1 位の極で，留数は 1 である．他方，$z=n\,(n=2, 3, \cdots)$ の近くでは

$$t^{z-1}=t^{n-1}+(z-n)t^{n-1}\ln t+O(|z-n|^2)$$

とテイラー展開できるので

$$\int_{\mathrm{L}'}\frac{(-t)^{z-1}}{\mathrm{e}^t-1}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{i\pi(n-1)}(z-n)\int_{\mathrm{L}'}\frac{t^{n-1}\ln t}{\mathrm{e}^t-1}\mathrm{d}t+O(|z-n|^2)$$

となり，この 1 位の零は，$\Gamma(1-z)$ の 1 位の極と打ち消しあって，$z=n$ は正則点となる．

演習問題 12

1.
$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-t}t^{z-1}dt,\qquad e^{-t}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$$
を用いて，$\Gamma(z)$ の無限積（12.9）を証明せよ．

2.
$$|\Gamma(iy)|^2=1\Big/\left[y^2\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{y^2}{k^2}\right)\right]=\pi/[y\sinh\pi y]\quad (y \text{ は実数})$$
を示せ（したがって $\Gamma(z)$ は虚軸に沿って指数関数的に減衰する）．

3. 実数 x，y かつ $x>0$ に対し，$|\Gamma(x+iy)|\leqq\Gamma(x)$ を示せ．

4. $|z|<1$，α が複素定数のとき，次の展開式を示せ．
$$(1+z)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha-n+1)}z^n$$

5. $\gamma=-\int_0^{\infty}e^{-t}\ln t\,dt$ を示せ．

6. ψ 関数について次の性質を示せ：

（i）$\psi(z)=\dfrac{d}{dz}\ln\Gamma(z)=-\gamma-\dfrac{1}{z}+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z}{(z+k)k}$

（ii）$\psi(1)=-\gamma$（オイラー定数）

（iii）$\psi(z+1)=\dfrac{1}{z}+\psi(z)$

（iv）$\psi(n+1)=\dfrac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)}=\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}\right)-\gamma$（$n$は正整数）

を示せ．

7. 式(12.23)を示せ．

8. $\mathrm{Re}\,p>0$，$\mathrm{Re}\,q>0$ のとき，周積分(12.26)が式(12.18)に帰着することを示せ．

9. ζ 関数の定義(12.27)を使って

$$\left(1-\frac{1}{2^z}\right)\zeta(z)=1+\frac{1}{3^z}+\frac{1}{5^z}+\cdots\cdots=1+\sum_{k>1}\frac{1}{k^z}\qquad(2 \text{ の倍数を除く整数 } k)$$

$$\left(1-\frac{1}{3^z}\right)\left(1-\frac{1}{2^z}\right)\zeta(z)=1+\sum_{k>1}\frac{1}{k^z}\qquad(2 \text{ と } 3 \text{ の倍数を除く整数 } k)$$

$$\left(1-\frac{1}{5^z}\right)\left(1-\frac{1}{3^z}\right)\left(1-\frac{1}{2^z}\right)\zeta(z)=1+\sum_{k>1}\frac{1}{k^z}\qquad(2,\ 3,\ 5 \text{ の倍数を除く整数 } k)$$

を導き，その結果として

$$\frac{1}{\zeta(z)}=\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^{z}}\right)\qquad(\mathrm{Re}\,z>1)$$

(すべての素数 p についての無限積)を示し，右辺の無限積が絶対収束することを証明せよ．

10.　Γ 関数の無限積表現(12.12)を用いて，次の2倍公式を示せ：

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z)$$

11.　Γ 関数の積分表示を

$$\Gamma(z)=\int_{\mathrm{C}}v(t)t^{z-1}\mathrm{d}t \qquad (12.30)$$

と仮定して，積分路 C と関数 $v(t)$ を以下の手順で決定せよ．

(a)　積分路 C を適当に選び，式(12.30)が式(12.4)を満たさなければならない性質を使って，$v(t)$ に対する微分方程式を導け．

(b)　その方程式を解いて，$\mathrm{Re}\,z>0$ に対し式(12.30)が式(12.1)に帰着するように $v(t)$ を定めよ．また積分路 C は t 面でどのような曲線であるか．

12.　超幾何級数(2.13)の展開係数の $(\beta)_n$，$(\gamma)_n$ は Γ 関数によって，それぞれ $\Gamma(\beta+n)/\Gamma(\beta)$，$\Gamma(\gamma+n)/\Gamma(\gamma)$ と表わせる．$\Gamma(\beta+n)\Gamma(\gamma-\beta)/\Gamma(\gamma+n)$ に対して公式(12.23)を適用することにより，次の超幾何関数の積分表示を導け：

$$F(\alpha,\beta,\gamma\,;z)=-\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(1-\beta)\mathrm{e}^{-i\pi\gamma}}{\Gamma(\gamma-\beta)4\pi\sin\pi(\gamma-\beta)}\oint_{\mathrm{C}}u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-uz)^{-\alpha}\mathrm{d}u \qquad (12.31)$$

ただし積分路 C は，図12.4の閉曲線とする．また $\mathrm{Re}\gamma>\mathrm{Re}\beta>0$ のとき，式(12.31)は次の形にも書けることを示せ：

$$F(\alpha,\beta,\gamma\,;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-uz)^{-\alpha}\mathrm{d}u \qquad (12.32)$$

(オイラーの積分表示)．

13.　$-1<\mathrm{Re}(\nu)<0$ のとき，図9.9の周積分 D を t 面で z から1までの線積分に直すことにより，式(9.23)の $P_\nu(z)$ は

$$P_\nu(z)=F\left(-\nu,\nu+1,1\,;\frac{1-z}{2}\right)$$

となることを示せ．

13. ベッセル関数

13.1 ベッセル方程式とベキ級数解

物理学の波動問題ではヘルムホルツ方程式 $\triangle U+k^2U=0$ がしばしば登場する(k は定数，U は未知関数，$\triangle$ は 3 次元ラプラシアン)．これを円柱座標(x, r, θ)で表わすと

$$U_{xx}+\frac{1}{r}\left[(rU_r)_r+\frac{1}{r}U_{\theta\theta}\right]+k^2U=0$$

と書ける．この方程式の解は変数分離 $U=X(x)R(r)\Theta(\theta)$ の形で求められるが，そのとき x および θ 方向に周期性を仮定する：$X=A\mathrm{e}^{i\alpha x}+B\mathrm{e}^{-i\alpha x}$，$\Theta=C\mathrm{e}^{im\theta}+D\mathrm{e}^{-im\theta}$．ここで m は整数, α は任意の(複素)定数である．動径部分 $R(r)$ に対する方定式は

$$r^2R''+rR'+[(k^2-\alpha^2)r^2-m^2]R=0$$

となる．これはベッセル(Bessel)方程式の形をしている．

複素関数論では，規格された動径座標 $r\sqrt{k^2-\alpha^2}$ を変数 z とし，m は任意の複素定数 λ でおき換えて，次の形のベッセル微分方程式にする：

$$z^2\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+z^2w-\lambda^2w=0 \tag{13.1}$$

以下，この方程式の解を求めることを考えよう．まず，形式的に

$$w=z^\rho(a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots\cdot) \tag{13.2}$$

と書き，方程式を満足するように係数 $a_0, a_1, a_2, \cdots\cdot$ および指数 ρ を決めることができるかどうか調べることにしよう．ρ は未定なので $a_0\neq0$ と仮定しても一般性が失われることはない(a_0 は 0 でない最初の係数)．

級数(13.2)を式(13.1)に代入して整理すると，z^ρ の係数は $(\rho^2-\lambda^2)a_0$ となることがわかる．方程式を満たすためには，これは恒等的に 0 とならなければな

らない．$a_0 \neq 0$ を仮定しているから

$$\rho^2-\lambda^2=0 \tag{13.3}$$

となる．同様に，$z^{\rho+1}$，$z^{\rho+2}$ の係数についても 0 とならなければならないから

$$[(\rho+1)^2-\lambda^2]\,a_1=0,$$

$$[(\rho+2)^2-\lambda^2]\,a_2=-a_0$$

一般に，$z^{\rho+m}(m\geqq 2)$ の係数を 0 とおくと

$$[(\rho+m)^2-\lambda^2]a_m=-a_{m-2} \tag{13.4}$$

最初の式(13.3)より，$\rho=\pm\lambda$ を得る．ρ の値としていずれか一方をとって，係数 $a_2, a_3, \cdots\cdots$ を a_0（あるいは a_1）の関数として，次つぎと決めることができるものとしよう．そのときには，2 つの異なる解を(形式的に)得ることになる．ところが，もし式(13.4)の a_m の係数

$$(\rho+m)^2-\lambda^2$$

が 0 となることがあるとすると，そのような方法で a_m を決定する方法がない．それが起こるのは，式(13.3)の二根 $+\lambda$，$-\lambda$ の差が整数 n に等しい場合である．そこで当面は $2\lambda \neq$ 整数を仮定する．方程式(13.3)は**指数方程式**とよばれる．

指数 ρ の 2 つの値のうち，実部が大きい方を $+\lambda$ と書き，他方を $-\lambda$ としよう．$\rho=+\lambda$ とすれば，a_m の係数は消えることはないので，上式より $a_1=0$ とおくと

$$a_{2m}=-\frac{a_{2(m-1)}}{m(\lambda+m)}\frac{1}{2^2}=(-1)^m\frac{1}{m!}\frac{1}{(\lambda+m)(\lambda+m-1)\cdots\cdots(\lambda+1)}\frac{a_0}{2^{2m}}$$

$$a_{2m-1}=0 \qquad\qquad (m=1,2,\cdots\cdots)$$

を得る．このようにして次の解が得られる：

$$a_0z^\lambda\left[1-\frac{1}{1\cdot(\lambda+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^2+\frac{1}{1\cdot 2\cdot(\lambda+1)(\lambda+2)}\left(\frac{z}{2}\right)^4-\cdots\cdots\right]$$

ここで Γ 関数の性質(12.6)を使うと，$(\lambda+m)(\lambda+m-1)\cdots\cdots(\lambda+1)=\Gamma(\lambda+m+1)/\Gamma(\lambda+1)$ と書けることがわかる．習慣上は $a_0=1/[2^\lambda\Gamma(\lambda+1)]$ とする．このとき，ベッセル方程式(13.1)の 1 つの解を

$$J_\lambda(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^\lambda\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\lambda+m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m} \tag{13.5}$$

と書き，λ 次の**第一種ベッセル関数**とよぶ．右辺の最初の因子 $(z/2)^\lambda$ を除けば，

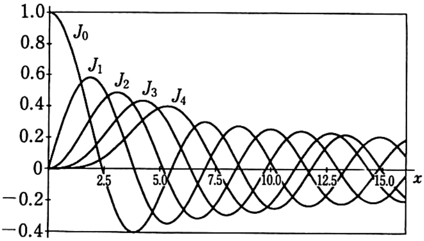


図 13.1　実軸上$(z=x)$でのベッセル関数$J_n(x)$ $(n=0\sim4)$

和は$(z/2)$の偶数ベキの項だけからなる無限級数で，その収束半径は無限大である（演習問題 13 の 1）．それゆえ，関数$J_\lambda(z)/(z/2)^\lambda$は$z$の整関数である（§13.5 でも再び示される）．

指数方程式の二根の差2λが非整数である限り，式(13.4)で$\rho=-\lambda$とすれば他の解$J_{-\lambda}(z)$が得られる．J_λと$J_{-\lambda}$の初項はそれぞれz^λ，$z^{-\lambda}$に比例しているので，これら 2 つの解は線形独立である．後の§13.4 で，λが整数でさえなければ，$J_\lambda(z)$と$J_{-\lambda}(z)$はベッセル方程式の線形独立な基本解をなすことを見るであろう．

次に，$\lambda=n$の場合(nは 0 または正整数)を考えよう．1 つの解は，式(13.5)で$\lambda=n$とした$J_n(z)$で与えられる(図 13.1)：

$$J_n(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^n\left[\frac{1}{n!}-\frac{1}{1!(n+1)!}\left(\frac{z}{2}\right)^2+\frac{1}{2!(n+2)!}\left(\frac{z}{2}\right)^4-\cdots\right] \quad (13.6)$$

(ただし，$0!=1$)．しかしながら，式(13.5)で$\lambda=-n$としても

$$J_{-n}(z)=(-1)^n J_n(z) \quad (13.7)$$

が得られるだけで，これは独立な解ではない．式(12.12)から$1/\Gamma(m+1-n)$は$m=0,1,\cdots,n-1$に対し 0 となって，最初のn項が消えてしまうからである．上式から明らかに，$J_0(0)=1$，$J_n(0)=0$　$(n\neq0)$．

ハンケル (Hankel) の方法に従って第 2 の解を求めてみよう．$\lambda\to n$のとき，$J_\lambda(z)-(-1)^nJ_{-\lambda}(z)\to0$となるのであるから，次の極限を考えることにする：

$$\lim_{\lambda\to n}\frac{J_\lambda(z)-(-1)^nJ_{-\lambda}(z)}{\lambda-n}=F(z\,;\,n)$$

J_λおよび$J_{-\lambda}$はλについての解析関数である(λを複素変数としたとき正則で

ある)ので，λ について微分可能である．したがって，次の等式がなりたつ：

$$F(z\,;n)=\lim_{\lambda\to n}\frac{(J_\lambda-J_n)-(-1)^n(J_{-\lambda}-J_{-n})}{\lambda-n}=\left[\frac{\partial J_\lambda}{\partial\lambda}-(-1)^n\frac{\partial J_{-\lambda}}{\partial\lambda}\right]_{\lambda=n}\quad(13.8)$$

右辺の関数は確かにベッセル方程式(13.1)を満足している(演習問題 13 の 2)．これはノイマン関数，すなわち**第二種ベッセル関数**の π 倍となっている(§13.4 参照)．実数の λ および正実数の z に対し，$J_\lambda(z)$ および $J_{-\lambda}(z)$ は実数となる．

13.2　ベッセル関数の漸化式

式(13.5)の $J_\lambda(z)$ に z^λ または $z^{-\lambda}$ をかけ，それぞれを微分すれば，次の漸化式を示すことができる：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dz}[z^\lambda J_\lambda(z)]=z^\lambda J_{\lambda-1}(z)\\&\frac{d}{dz}[z^{-\lambda}J_\lambda(z)]=-z^{-\lambda}J_{\lambda+1}(z)\end{aligned}\right\}\quad(13.9)$$

微分を実行して整理すると

$$\left.\begin{aligned}&zJ_\lambda'(z)+\lambda J_\lambda(z)=zJ_{\lambda-1}(z)\\&zJ_\lambda'(z)-\lambda J_\lambda(z)=-zJ_{\lambda+1}(z)\end{aligned}\right\}\quad(13.10)$$

ここで特に $\lambda=0$ とおくと，$J_0'(z)=-J_1(z)$ の関係が得られる．上式の差あるいは和をとると

$$\left.\begin{aligned}&\frac{2\lambda}{z}J_\lambda(z)=J_{\lambda-1}(z)+J_{\lambda+1}(z)\\&2J_\lambda'(z)=J_{\lambda-1}(z)-J_{\lambda+1}(z)\end{aligned}\right\}\quad(13.11)$$

以下に示す $N_\lambda(z)$ の定義(13.30)および(13.8)の両式，さらに $-\lambda$ に対する式を使えば，関数 $N_\lambda(z)$ も上の式(13.9)～(13.11)と全く同じ漸化式を満足することが示される．λ が整数の場合でも，関数 N_λ および導関数は λ について連続なので，やはり $\lambda=n$ に対しても上の漸化式はなりたつ．

漸化式の 1 つの応用として，$J_n(z)$ の母関数を構成してみよう．まず

$$f(z,s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(z)\,s^n$$

によって関数 $f(z,s)$ を定義する．この級数は収束するものと仮定する．これを

z について微分すると

$$\frac{\partial}{\partial z}f(z,s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}[J_{n-1}(z)-J_{n+1}(z)]\,s^n$$
$$=\frac{1}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)f(z,s)$$

これを積分すると

$$f(z,s)=f(0,s)\,\mathrm{e}^{\frac{z}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)}$$

を得る．$f(z,s)$ の定義から $f(0,s)=J_0(0)=1$ である．このようにして，ベッセル関数の母関数が得られた：

$$\mathrm{e}^{\frac{z}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(z)s^n \tag{13.12}$$

式 (13.12) が実際になりたつことは次の性質から示される．関数 $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}zs}$ および $\mathrm{e}^{-z/2s}$ のそれぞれは絶対収束級数に展開でき，その積も絶対収束する．したがって項を再配列しても和は変わらない(§ 2.5 の B 項) ことから，式(13.12)の右辺を示すことができる．この関係は § 13.5 で別の方法からも導かれる．

13.3　積分変換法とハンケル関数

ベッセルの微分方程式(13.1)，あるいはその変形

$$L[w]\equiv z^2\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+z^2 w=\lambda^2 w \tag{13.13}$$

を満たす関数 $w(z)$ を積分変換によって求める方法を考えよう．これによってベッセル関数，ノイマン関数とは別の独立な関数の組，すなわち第一，第二種のハンケル関数の積分表示が得られる．後に両者の間の関係も与えられる．

関数 $w(z)$ の代わりに，もう 1 つの複素変数 ζ の新しい未知関数 $v(\zeta)$ を導入し，積分路 C に沿う径路積分によって

$$w(z)=\int_{\mathrm{C}}K(z,\zeta)v(\zeta)\mathrm{d}\zeta \tag{13.14}$$

と表わされると仮定する．ここで，“積分核”$K(z,\zeta)$ は複素変数 z，ζ のいずれについても解析的であるとする．積分表示(13.14)を式(13.13)に代入すると

$$\int_C \{L[K]-\lambda^2 K\}v(\zeta)\mathrm{d}\zeta=0 \tag{13.15}$$

となる．ここで線形微分作用素 L は変数 z についてのものであり，積分演算と交換できるものと仮定する．ここで，積分核 K は微分方程式 $L[K]=-K_{\zeta\zeta}$，すなわち

$$z^2K_{zz}+zK_z+z^2K+K_{\zeta\zeta}=0 \tag{13.16}$$

を満たすものとする．この方程式が，z 面・ζ 面で一価正則な解

$$K(z,\zeta)=\mathrm{e}^{-iz\sin\zeta} \tag{13.17}$$

をもつことは代入によって確かめられる．このときには，式(13.15)は

$$\int_C \{K_{\zeta\zeta}+\lambda^2K\}v(\zeta)\mathrm{d}\zeta=0$$

となる．さらに，部分積分すると

$$\int_C K(z,\zeta)\{v''+\lambda^2 v\}\mathrm{d}\zeta+\int_C \frac{\partial}{\partial\zeta}\{K_\zeta v-Kv'\}\mathrm{d}\zeta=0 \tag{13.18}$$

を得る．ここで関数 $v(\zeta)$ は微分方程式 $v''+\lambda^2 v=0$ を満たし，第 1 項が恒等的に 0 となるように選ぶ．そのような関数は $\mathrm{e}^{i\lambda\zeta}$ によって与えられる．

残るのは，第 2 項を 0 とすることである．第 2 項の積分を実行すると，結果は関数 $K_\zeta v-Kv'$ の C の両端での差 $[\quad]_C$ で与えられる：

$$\int_C \frac{\partial}{\partial\zeta}\{K_\zeta v-Kv'\}\mathrm{d}\zeta=[-ivKz\cos\zeta-v'K]_C$$

そこで，ζ 面の積分路 C として，図 13.2(a)，(b)の L_1，L_2 を考える．$\mathrm{Re}\,z>0$ のとき，関数 K は L_1，L_2 の両端で 0 になることがわかる．というのは，$\zeta=\xi+i\eta$ とおくと，$-iz\sin\zeta=-z(\mathrm{e}^{i\xi-\eta}-\mathrm{e}^{-i\xi+\eta})/2$ であり，L_1 の両端は $\zeta\to-\pi+i\infty$, $\zeta\to-i\infty$ で与えられ，その実部はいずれの端でも指数関数的に負の無限大になる．L_2 についても同様である．$K(z,\zeta)$ の式 (13.17) はその因子が指数関数の肩にのっているために，上式の右辺は L_1，L_2 の両端でいずれも 0 となる．このようにして，次の積分

$$H_\lambda^{(1)}(z)=\frac{1}{\pi}\int_{L_1}\mathrm{e}^{-iz\sin\zeta+i\lambda\zeta}\mathrm{d}\zeta \tag{13.19}$$

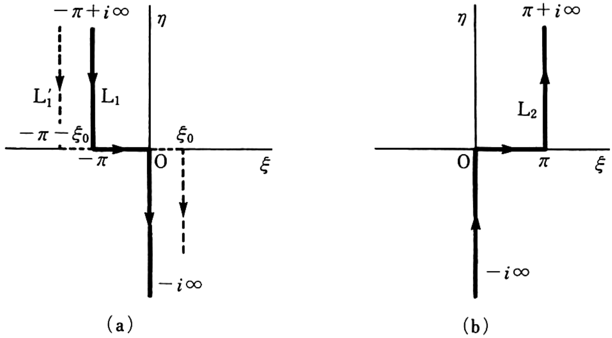


図 13.2　積分路 L_1 および L_2

$$H_\lambda^{(2)}(z)=\frac{1}{\pi}\int_{L_2} e^{-iz\sin\zeta+i\lambda\zeta}d\zeta \tag{13.20}$$

が微分方程式(13.1)の 2 つの解として得られる．これらはいわゆる第一，第二種の**ハンケル関数**である．この積分は Re $z>0$ で収束する．このようにして微分方程式の解を求める方法は**積分変換法**とよばれる．

上のハンケル関数は右半面 Re $z>0$ で定義されたが，これは次のようにして左半面に解析接続することができる．簡単のために，被積分関数の肩にのっている関数を

$$f(\zeta)=-iz\sin\zeta+i\lambda\zeta$$

とおく．その実部は

$$\mathrm{Re}[f(\zeta)]=y\sin\xi\cosh\eta+x\cos\xi\sinh\eta-b\xi-a\eta$$

と書ける．ここで，$z=x+iy$，$\zeta=\xi+i\eta$，$\lambda=a+ib$ とした．

積分路 L_1 の鉛直部分の実部は $-\pi$，0 であるが，これをそれぞれ $-\pi-\xi_0$，ξ_0 に変形すると(図 13.2(a))，この新しい路 L_1' 上の積分

$$\int_{L_1'} e^{f(\zeta)}d\zeta$$

は，$y\sin\xi_0-x\cos\xi_0<0$ で収束する．なぜなら，$\zeta=-\pi-\xi_0+i\eta$ あるいは $\zeta=\xi_0-i\eta$ とすると，いずれの場合も $\eta\to+\infty$ のとき

$$\mathrm{Re}[f(\zeta)]\sim(y\sin\xi_0-x\cos\xi_0)\frac{1}{2}e^\eta$$

と表わせるからである．すなわち，L_1' 上の積分は z面が直線

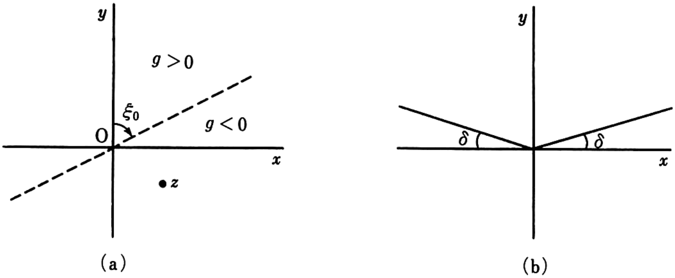


図 13.3 z 面

$$g(x, y; \xi_0) \equiv y \sin \xi_0 - x \cos \xi_0 = 0$$

で分けられ，左辺 $g(x, y; \xi_0)$ が負の領域で収束する(図 13.3(a))．

点 z が $g<0$ と半平面 $x>0$ の共通領域にあるときには，コーシーの積分定理から，L_1，L_1' のどちらの積分路からも同じ結果が得られる．したがって，$g<0$ の残りの領域では，新しい積分路 L_1' 上の積分は関数 $H_\lambda^{(1)}(z)$ の解析接続となる．ξ_0 を動かすことによって，原点 $z=0$ を除いて，関数 $H_\lambda^{(1)}(z)$ を次々と解析接続することができる．このとき原点は分岐点となるが，その位数は λ に依存する．

特に $\xi_0 = -\pi/2$ とおくと，L_1' はまっすぐな鉛直の積分路となり

$$H_\lambda^{(1)} = \frac{1}{\pi i} e^{-i\frac{\pi}{2}\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz\cosh\eta - \lambda\eta} d\eta$$

が得られる．これは z の上半面 $y>0$ で収束する．z が上半面の扇状領域 $\delta \leqq \arg(z) \leqq \pi - \delta$ （図 13.3(b)，$\delta>0$）にあって無限遠点に向かうと，上の被積分関数は積分路の至るところで 0 に収束する．したがって関数 $H_\lambda^{(1)}$ 自身も 0 に収束する(積分の収束は，$y \geqq \rho (>0)$ を満たすどんな z の部分領域でも一様である)．同じようにして，関数 $H_\lambda^{(2)}(z)$ は下半面の扇状領域 $-\pi+\delta \leqq \arg(z) \leqq -\delta$ で無限遠点に向かうとき 0 に収束する．

このような無限遠でのハンケル関数の性質から，2 つの関数 $H_\lambda^{(1)}(z)$, $H_\lambda^{(2)}(z)$ は各 λ の値に対して互いに線形独立であることがわかる．というのは，$|z|$ が増大するとき，関数 $H_\lambda^{(1)}(z)$ は負の虚軸上で，$H_\lambda^{(2)}(z)$ は正の虚軸上でそれぞれ限りなく増大する性質があるからである(演習問題 13 の 4)．

関数 $H_\lambda^{(1)}(z)$ および $H_\lambda^{(2)}(z)$ が線形独立であることから，ベッセル微分方程

式の解の全体がハンケル関数からも得られることになる．実際，解はすべて次の線形結合

$$c_1 H_\lambda^{(1)}(z) + c_2 H_\lambda^{(2)}(z) \tag{13.21}$$

で表わされる（c_1，c_2 は定数）．

13.4　ベッセル関数，ノイマン関数，ハンケル関数

ベッセル関数 $J_\lambda(z)$，ノイマン関数 $N_\lambda(z)$ と前節で与えたハンケル関数 $H_\lambda^{(1)}(z)$, $H_\lambda^{(2)}(z)$ はいずれもベッセル方程式の解であり，それら相互の間には次のような関係がある：

$$H_\lambda^{(1)}(z) = J_\lambda(z) + i\,N_\lambda(z), \quad H_\lambda^{(2)}(z) = J_\lambda(z) - i\,N_\lambda(z) \tag{13.22}$$

あるいは

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{2}(H_\lambda^{(1)}(z) + H_\lambda^{(2)}(z)) \tag{13.23 a}$$

$$N_\lambda(z) = \frac{1}{2i}(H_\lambda^{(1)}(z) - H_\lambda^{(2)}(z)) \tag{13.23 b}$$

ここで定義された関数 $N_\lambda(z)$ は λ 次ノイマン(Neumann)関数とよばれる．また，このように定義された $J_\lambda(z)$ が §13.1 のベッセル関数と一致していることは次節で示されよう．

実数の λ および正実数の z に対しては，$J_\lambda(z)$，$N_\lambda(z)$ は実数となるので，ハンケル関数 $H_\lambda^{(1)}(z)$，$H_\lambda^{(2)}(z)$ の方は互いに複素共役となる．実際，上つきのバーで複素共役を表わすことにすると，$H_\lambda^{(1)}(z)$ の複素共役は

$$\overline{H_\lambda^{(1)}(z)} = \frac{1}{\pi}\int_{\bar{\mathrm{L}}_1} \mathrm{e}^{iz\sin\zeta - i\lambda\zeta}\,\mathrm{d}\zeta$$

と表わせる．ここで $\bar{\mathrm{L}}_1$ は L_1 の実軸に関する反転である．ζ を $-\zeta$ でおき換えると

$$\overline{H_\lambda^{(1)}(z)} = -\frac{1}{\pi}\int_{-\bar{\mathrm{L}}_1} \mathrm{e}^{-iz\sin\zeta + i\lambda\zeta}\,\mathrm{d}\zeta$$

となる．積分路 $-\bar{\mathrm{L}}_1$ は L_2 上の逆向き積分路なので

$$\overline{H_\lambda^{(1)}(z)} = \frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{L}_2} \mathrm{e}^{-iz\sin\zeta + i\lambda\zeta}\,\mathrm{d}\zeta = H_\lambda^{(2)}(z)$$

を得る．それゆえ，$J_\lambda(z)$ および $N_\lambda(z)$ は，λ，z が実数で $z>0$ のとき，それぞれ $H_\lambda^{(1)}(z)$ の実部および虚部を表わすことがわかる．

ベッセルの方程式は λ を λ^2 の形で含むので，もし $H_\lambda^{(k)}(z)$ が解なら ($k=1, 2$)，$H_{-\lambda}^{(k)}(z)$ もまた解である．それらは次の関係で結ばれている：

$$H_{-\lambda}^{(1)}(z)=\mathrm{e}^{i\lambda\pi}H_\lambda^{(1)}(z), \qquad H_{-\lambda}^{(2)}(z)=\mathrm{e}^{-i\lambda\pi}H_\lambda^{(2)}(z) \tag{13.24}$$

(演習問題 13 の 4)．したがって，$H_\lambda^{(1)}(z)$ と $H_{-\lambda}^{(1)}(z)$ は独立ではない．$H_\lambda^{(2)}(z)$ も同様である．他方，ベッセル関数，ノイマン関数については

$$J_{-\lambda}(z)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{i\lambda\pi}H_\lambda^{(1)}(z)+\mathrm{e}^{-i\lambda\pi}H_\lambda^{(2)}(z)) \tag{13.25}$$

$$N_{-\lambda}(z)=\frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{i\lambda\pi}H_\lambda^{(1)}(z)-\mathrm{e}^{-i\lambda\pi}H_\lambda^{(2)}(z)) \tag{13.26}$$

となり，一般にこれらの関数はそれぞれ $J_\lambda(z)$，$N_\lambda(z)$ と線形独立である．線形従属の関係になるのは，例えば式(13.25)と(13.23 a)を比較して，変換行列式が

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{i\lambda\pi} & \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-i\lambda\pi} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{i}{2}\sin\lambda\pi = 0$$

のときである．すなわち，λ が整数 n のときである．この場合には，式(13.7)および

$$N_{-n}(z)=(-1)^n N_n(z) \tag{13.27}$$

がなりたつ．

このようにして，ベッセル方程式の一般解は，λ が整数でないときには

$$c_1 J_\lambda(z)+c_2 J_{-\lambda}(z) \tag{13.28}$$

の形で表わせる．他方，λ が整数 n のときには

$$c_1 J_n(z)+c_2 N_n(z) \tag{13.29}$$

で一般解が表わせる．

以上で導入した $J_\lambda(z)$ および $J_{-\lambda}(z)$ によってノイマン関数 $N_\lambda(z)$ の標準的定義を与えることができる：

$$N_\lambda(z)=\frac{J_\lambda(z)\cos\lambda\pi-J_{-\lambda}(z)}{\sin\lambda\pi} \tag{13.30}$$

(演習問題 13 の 5). $\lambda\to n$ の極限では, $N_\lambda(z)\to\dfrac{1}{\pi}F(z\,;n)$ となることは容易に示せよう(式(13.8)). このようにして, $J_\lambda(z)$ と $N_\lambda(z)$ がベッセル方程式の 2 つの独立な解の組をなしていることがわかる. $\lambda=n$ のときには, $N_n(z)$ はその極限によって与えられる:

$$N_n(z)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\lambda}{\partial\lambda}-(-1)^n\frac{\partial J_{-\lambda}}{\partial\lambda}\right]_{\lambda=n} \tag{13.31}$$

式 (13.5) を直接に λ で微分することによって $N_n(z)$ の級数表現が得られる. その際

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{z}{2}\right)^\lambda=\frac{\partial}{\partial\lambda}e^{\lambda\ln(z/2)}=\left(\frac{z}{2}\right)^\lambda\ln\frac{z}{2}$$

$$\lim_{\lambda\to n}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{\Gamma(-\lambda+m)}=\lim_{\lambda\to n}\frac{\Gamma'(-\lambda+m)}{\Gamma^2(-\lambda+m)}=(-1)^{n-m+1}(n-m)!$$

$$(m=1,\cdots,n)$$

が使われる. 2 番目の最後の等式は $z=-(n-m)$ で $\Gamma(z)$ の留数が $(-1)^{n-m}/(n-m)!$ であるためである. さらに

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{\Gamma(\lambda+m)}=-\frac{\psi(\lambda+m)}{\Gamma(\lambda+m)} \qquad (m\text{ は正整数})$$

より ψ 関数(式(12.15))の性質, 演習問題 12 の 6 の(iv)も使われる. このようにして最終的に, $n\geqq 0$ に対し

$$N_n(z)=\frac{2}{\pi}\left(\gamma+\ln\frac{z}{2}\right)J_n(z)-\frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-m-1)!}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$
$$-\frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(z/2)^{2m}}{m!(m+n)!}(b_m+b_{m+n}) \tag{13.32}$$

となる. ここで

$$b_0=0,\quad b_m=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m} \qquad (m\neq 0)$$

であり, もし $n=0$ なら, 右辺第 2 項の有限和 $\sum_{m=0}^{n-1}$ は省略される. したがって, $N_n(z)$ の特異点は原点での n 位の極および対数分岐点である. $N_0(z)$ は対数特

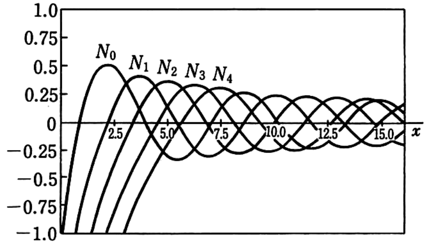


図 13.4　実軸上($z=x$)でのノイマン関数 $N_n(x)$ ($n=0$～4)

異点のみをもつ．原点を除けば $N_n(z)$ は正則である(図 13.4)．

13.5　ベッセル関数の積分表示

関数 $H_\lambda^{(1)}(z)$ および $H_\lambda^{(2)}(z)$ の積分表示 (13.19)，(13.20) を加え合わせることは，積分路 L_1 と L_2 を加え合わせることに帰着する．その結果，負の虚軸上の積分は相殺し，式(13.23)から $J_\lambda(z)$ に対する積分表示として

$$J_\lambda(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{L}} \mathrm{e}^{-iz\sin\zeta+i\lambda\zeta}\mathrm{d}\zeta \tag{13.33}$$

を得る．ここで L は図 13.5 の積分路で，$\mathrm{Re}(z)>0$ で積分は収束する．

特に λ が整数 n に等しい場合には，積分路 L の垂直部分の積分は，被積分関数の周期性のために打ち消し合う結果

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{iz\sin\zeta-in\zeta}\mathrm{d}\zeta \tag{13.34}$$

を得る．ここで ζ を $-\zeta$ でおき換えた．被積分関数を $\cos(z\sin\zeta-n\zeta)+i\sin$

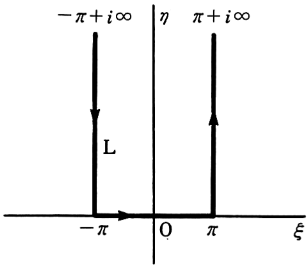


図 13.5　積分路 L

$(z\sin\zeta-n\zeta)$ と書けば，第 1 項は ζ の偶関数，第 2 項は ζ の奇関数であるから

$$J_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(z\sin\theta-n\theta)\,\mathrm{d}\theta \quad \text{（ベッセルの積分表示）} \tag{13.35}$$

となる．この積分表示によれば，$J_n(z)$ はすべての z で定義される．このようにして，整数次のベッセル関数は全平面で一価正則，それゆえ整関数であることがわかる．

面白いことに，式(13.34)は ζ の周期関数 $\mathrm{e}^{iz\sin\zeta}$（ζ は実数）のフーリエ係数そのものを与える．したがって $\mathrm{e}^{iz\sin\zeta}$ のフーリエ級数展開は

$$\mathrm{e}^{iz\sin\zeta}=\sum_{-\infty}^{\infty}J_n(z)\,\mathrm{e}^{in\zeta} \tag{13.36}$$

と書ける．この式は，整数 n に対する関数 $J_n(z)$ を母関数 $\mathrm{e}^{iz\sin\zeta}$ によって定義したもので，$\mathrm{e}^{i\zeta}=s$ とおけば式(13.12)と一致する．

z と ζ が実数のときは，$\zeta=\theta$ とおくと，式(13.36)より

$$\left.\begin{aligned}\cos(z\sin\theta)&=J_0(z)+2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n}(z)\cos 2n\theta\\ \sin(z\sin\theta)&=\qquad\quad\; 2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n-1}(z)\sin(2n-1)\theta\end{aligned}\right\} \tag{13.37}$$

ここで式(13.7)を使った．

式(13.33)で，積分変数を $\eta=\mathrm{e}^{-i\zeta}$ にかえると

$$J_\lambda(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{M}}\mathrm{e}^{\frac{z}{2}\left(\eta-\frac{1}{\eta}\right)}\eta^{-\lambda-1}\,\mathrm{d}\eta \quad \text{（ソニンの積分表示）} \tag{13.38}$$

となる．ここで M は，図 13.6 の η 面の積分路である．この路は負実軸上を $\zeta=-1$ まできて，原点まわりの単位円を反時計まわりに回り，再び負実軸上を $-\infty$ まで戻る．

λ が整数 n に等しい $(\lambda=n)$ ときには，負実軸上の積分は消し合って

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathrm{C}_0}\mathrm{e}^{\frac{z}{2}\left(\eta-\frac{1}{\eta}\right)}\eta^{-n-1}\,\mathrm{d}\eta \tag{13.39}$$

となる．C_0 は原点を反時計まわりに一周する閉曲線である．この形は，$J_n(z)$ が関数 $\exp\left[\frac{z}{2}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)\right]$ のローラン展開の n 次係数に等しいことを表現している．その展開形は，すでに式(13.12)に与えられている．

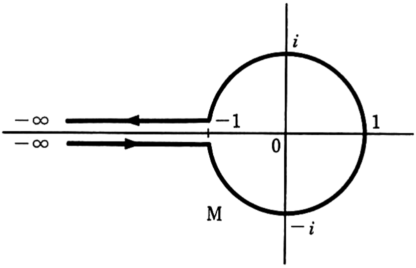


図 13.6　積分路 M(η 面)

積分表示(13.38)で，$\eta=2\zeta/z$ と変換し，z を正実数として ζ について同じ積分路をとると

$$J_\lambda(z)=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^\lambda\int_M e^{\zeta-\frac{z^2}{4\zeta}}\zeta^{-\lambda-1}d\zeta$$

(シュレーフリの積分表示)　　(13.40)

を得る．この積分は，実はすべての z について収束するので，式(13.40)はすべての z に対するベッセル関数の積分表示を与える．特にこれからわかることは，$J_\lambda(z)/z^\lambda$ がすべての λ について z の整関数であることである．

上式から $J_\lambda(z)$ のベキ級数表示が得られる．$\exp(-z^2/4\zeta)$ をベキ級数展開すると

$$J_\lambda(z)=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^\lambda\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}\int_M e^\zeta\zeta^{-(\lambda+m+1)}d\zeta$$

ここで，$1/\Gamma(z)$ の積分表示(12.16)を使えば，これから式(13.5)が直ちに得られる．このようにして，§13.1 のベッセル関数 $J_\lambda(z)$ の定義と本節の積分表示とに矛循がないことがわかる．

13.6　第二の積分変換法

ベッセル関数 $J_\lambda(z)$ が z^λ という因子をもつことを知っているから，式(13.14)の積分核を $K(z,\zeta)=z^\lambda e^{iz\zeta}$ とおいてみよう：

$$w(z)=z^\lambda\int_C e^{iz\zeta}v(\zeta)d\zeta \tag{13.41}$$

これを方程式(13.13)に代入する．$L[K]=(1-\zeta^2)z^2K+i(2\lambda+1)\zeta zK+\lambda^2K$ で

あるから，式(13.18)の代わりに

$$\int_{\mathrm{C}} \mathrm{e}^{iz\zeta}\left\{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}[(\zeta^2-1)v(\zeta)]+(2\lambda+1)\zeta v(\zeta)\right\}\mathrm{d}\zeta+[(\zeta^2-1)\mathrm{e}^{iz\zeta}v(\zeta)]_{\mathrm{C}}=0$$

が得られる．このようにして，もし $v(\zeta)$ が方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}[(\zeta^2-1)v(\zeta)]-(2\lambda+1)\zeta\, v(\zeta)=0 \tag{13.42}$$

を満たし，積分路Cの両端での差

$$[(\zeta^2-1)\mathrm{e}^{iz\zeta}v(\zeta)]_{\mathrm{C}} \tag{13.43}$$

が0となるなら，式(13.41)がベッセル方程式の解となる．

関数 $v(\zeta)$ を $(\zeta^2-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}$ とし，積分路Cを図13.7の8の字形の曲線Uによってこれらの要請を満たすことができる：

$$w(z)=c\,z^{\lambda}\int_{\mathrm{U}} \mathrm{e}^{iz\zeta}(\zeta^2-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\zeta \qquad (c\text{ は定数}) \tag{13.44}$$

(演習問題13の6)．積分路は有限のところを走るから，以下で示すように $\lambda \neq n+\dfrac{1}{2}\ (n=0, \pm 1, \cdots\cdot)$ ならば，全 z 平面でこの表現は有効である．

定数 c を決めるために，$J_\lambda(z)$ の積分表示(13.40)と比較する．両者を z^λ で割って，$z=0$ とおくと

$$c\int_{\mathrm{U}}(\zeta^2-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2^{\lambda}}\int_{\mathrm{M}}\mathrm{e}^{\zeta}\zeta^{-\lambda-1}\mathrm{d}\zeta \tag{13.45}$$

右辺は式(12.16)から，$1/[2^\lambda\Gamma(\lambda+1)]$ に等しい．次に左辺の積分

$$I=\int_{\mathrm{U}}(\zeta^2-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\zeta \tag{13.46}$$

を計算しよう．そのために，$\zeta-1$ および $\zeta+1$ の偏角は曲線Uが実軸上 $+1$ の

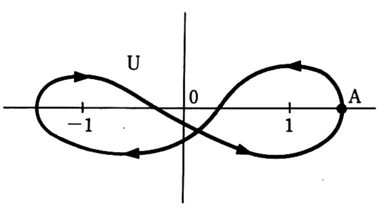


図13.7　積分路U

右側を切るときを0ととる．Re$\lambda>-\dfrac{1}{2}$の場合には，曲線Uを実軸上の区間$(-1,1)$の往復と点±1のまわりの小円に縮少させることができる．Re$\lambda>-\dfrac{1}{2}$の条件のために，±1のまわりの小円上の積分は半径が無限小の極限では消える．その結果

$$I=\mathrm{e}^{-i\pi\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{i\pi\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)}\int_{1}^{-1}(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=-4i\sin\pi\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\int_0^1(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x \tag{13.47}$$

$$=2i\sin\pi\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)B\left(\frac{1}{2},\lambda+\frac{1}{2}\right)=2i\sin\pi\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda+1)}$$

ここで，B関数の定義(12.21)および(12.23)を最後の式で使った．

式(12.14)から，$\Gamma(z)\sin\pi z=\pi/\Gamma(1-z)$であることを使うと

$$I=2\pi i\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}$$

となる．この関係はRe$\lambda\leqq-\dfrac{1}{2}$に解析接続できる．したがって求める定数$c$の値は，式(13.45)，(13.46)より

$$c=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2^\lambda}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

このようにして，$J_\lambda(z)$の積分表示は

$$J_\lambda(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}{2\pi i\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\lambda\int_{\mathrm{U}}\mathrm{e}^{iz\zeta}(\zeta^2-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\zeta \tag{13.48}$$

となる(ポアソンの積分表示)．この表示は$n\geqq0$なる整数に対し，$\lambda\neq n+\dfrac{1}{2}$のときになりたつ．

$\mathrm{Re}\,\lambda > -\dfrac{1}{2}$ のときには，式(13.47)の変形およびその直後の説明を応用すれば

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{izx}(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x \qquad (13.49)$$

が導ける．さらに $x=\cos\theta$ とおくと，$\mathrm{Re}\,\lambda > -\dfrac{1}{2}$ に対し

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \int_{0}^{\pi} \cos(z\cos\theta)(\sin\theta)^{2\lambda}\mathrm{d}\theta \qquad (13.50)$$

を得る(ロンメル(Lommel)の積分表示)．

演習問題 13

1. ベッセル関数 $J_\lambda(z)$ の級数表現(13.5)の収束半径の大きさはどれだけか．
2. $J_\lambda(z)$ が方程式(13.1)を満たすとき，次の関数

$$\left[\frac{\partial J_\lambda}{\partial \lambda}-(-1)^n\frac{\partial J_{-\lambda}}{\partial \lambda}\right]_{\lambda=n}$$

もやはり同じ式(13.1)を満足することを示せ．

3. $$\frac{1}{z^\lambda}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z^\lambda J_\lambda(z)], \qquad -z^\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z^{-\lambda}J_\lambda(z)]$$

がそれぞれ $J_{\lambda-1}(z)$，$J_{\lambda-1}(z)$ に等しいことを示せ．

4. $$H_{-\lambda}{}^{(1)}(z)=\mathrm{e}^{i\lambda\pi}H_\lambda{}^{(1)}(z), \qquad H_{-\lambda}{}^{(2)}(z)=\mathrm{e}^{-i\lambda\pi}H_\lambda{}^{(2)}(z)$$

の関係を証明せよ．

5. $$N_\lambda(z)=\frac{J_\lambda(z)\cos\lambda\pi-J_{-\lambda}(z)}{\sin\lambda\pi}$$

の関係がなりたつことを，式(13.22)—(13.24)から導け．

6. 図 13.5 の積分路 U によって式(13.43)を 0 とすることができることを示せ．
7. (a) $J_\lambda(z)$ の級数展開の一般項が

$$\frac{(-1)^m(z/2)^{2m+\lambda}}{m!\Gamma(\lambda+m+1)}=\frac{(z/2)^\lambda}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}\frac{(-1)^m z^{2m}}{(2m)!}\int_0^1 t^{\lambda-\frac{1}{2}}(1-t)^{m-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$$

と書けることを式(12.18)を使って示せ．

(b) この結果を使って級数の和から，式(13.50)を示せ．

14. 漸近的方法

14.1 漸近展開

変数の値が十分大きいときに，関数値を精度よく近似的に得る方法について考えてみよう．漸近(ぜんきん)展開(asymptotic expansion)とよばれる方法がその 1 つである．まず，具体例の考察から始めることにする．

積分形で定義された次の関数は積分指数関数とよばれる：

$$E_i(z)=\int_z^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t \tag{14.1}$$

この関数は無限遠点 $z=\infty$ で解析的ではない．実際，導関数 $E_i'(z)=-\mathrm{e}^{-z}/z$ は ∞ が真性特異点となっていることを示している(§ 6.2 の(III′)参照)．したがって，$1/z$ についての収束ベキ級数を得ることはできないが，漸近展開級数とよばれるよい近似式を得ることはできる．x が正の実数で十分大きいとすると，部分積分によって

$$E_i(x)=\int_x^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}-\int_x^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\mathrm{d}t$$

を得る．この部分積分を n 回くり返したのち

$$S_n(x)=\mathrm{e}^{-x}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2!}{x^3}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}\right] \tag{14.2}$$

$$R_n(x)=(-1)^n n!\int_x^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{n+1}}\mathrm{d}t \tag{14.3}$$

を定義すると

$$E_i(x)=S_n(x)+R_n(x) \tag{14.4}$$

と表わすことができる．級数 $S_n(x)$ についてみると，x の値を固定して，n を限りなく大きくするとき，S_n の中の高次の項は係数 $(n-1)!$ のためにいくらでも

大きくなる．したがって $S_\infty(x)$ は収束級数とはなってはいない．しかし式(14.4)は正確な式であり，大きい x に対し $E_i(x)$ を得るために使うこともできる．それを示すために，R_n の大きさの上界を評価してみると

$$|R_n(x)|<\frac{n!}{x^{n+1}}\int_x^\infty \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-x}\frac{n!}{x^{n+1}}$$

を得る．ここで，n を固定すると，$R_n(x)$ は $x\to\infty$ のときいくらでも小さくなる．しかも x が大きくなるとき，この右辺は $S_n(x)$ の最後の項よりもはやく 0 に近づく．それゆえ，十分大きな x に対し，$S_n(x)$ は$E_i(x)$ の正確な近似を与えることがわかる．関数 $E_i(x)$ が $x\to\infty$ で，例えば $S_3(x)$ によって，いくらでもよく近似されるとき

$$E_i(x)\sim S_3(x),\quad \text{あるいは}\quad E_i(x)\sim \mathrm{e}^{-x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)$$

と書き，$E_i(x)$ は $S_3(x)$ によって漸近的に近似されるといい，$S_3(x)$ は $E_i(x)$ の**漸近展開**という．

ここで漸近展開の重要な特徴を指摘しておこう．例えば $|R_3(x)|<\mathrm{e}^{-x}3!/x^4$，$|R_5(x)|<\mathrm{e}^{-x}5!/x^6$であるから，$x$ が十分大きければ，$S_5(x)$ は $S_3(x)$ よりもいい近似を与える．しかしながら，x がおおよそ 4 よりも小さい値では，$S_5(x)$ は $S_3(x)$ よりも近似の度合いは落ちてしまう．x が小さいときには漸近展開は役に立たないのである．前にも述べたように，$S_n(x)$ の級数は n が増加するとき(x は固定して)，発散性であり，$|R_n(x)|$ は最初は減少するが，$n\to\infty$ のとき，いずれは増加を始め，ついには限りなく大きくなってしまう．与えられた x の

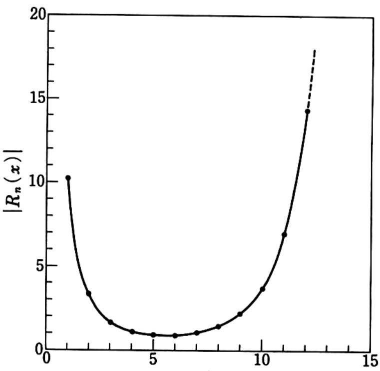


図 14.1　$x=5.5$ に対する $|R_n(x)|$

値に対し，$|R_n(x)|$ の最小値は n が x の整数部分の近傍で起こる(図 14.1)．誤差 $R_n(x)$ の符号は n が 1 つ増えるごとに交代する性質がある．

もし，関数 $f(z)$ が $z=\infty$ で解析的と仮定すると，$|z|>R$ （R はある正定数）で $f(z)$ は絶対収束級数で表わせる．$S_n(z)$ がその最初の n 項の和とすると，$|f(z)-S_n(z)|$ は与えられた z ($|z|>R$) に対し $n\to\infty$ のとき 0 に収束するばかりでなく，n の固定値に対し $|z|\to\infty$ のときにも 0 に収束する．ところが，もし $f(z)$ が $z=\infty$ で解析的でないとすると，そのような収束級数は存在しない．それでもなお，$|z|$ が大きいときの $f(z)$ を，漸近展開とよばれるある部分和 S_n によって，十分精度よく近似することができる．すなわち，S_n は $n\to\infty$ で収束しないかもしれないが，n を固定し，$\arg z$ のある範囲で，$|f(z)-S_n(z)|$ は $|z|\to\infty$ のとき 0 に収束することがありうる．

14.2 ラプラスの方法

Γ 関数

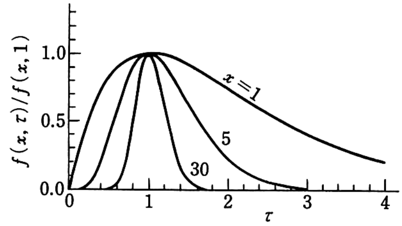
$$\Gamma(x+1)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^x\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t+x\ln t}\,\mathrm{d}t \tag{14.5}$$

に対し，正実数 x が限りなく大きくなるときの漸近表現を求めてみよう．そのため，被積分関数 $\exp(-t+x\ln t)$ が最も大きな値をとる点の近傍を見つけて，そこでの積分で近似する．この方法はラプラスの方法とよばれる．これは $x\to\infty$ のとき，そこからの寄与にますます限定されるようになるとき有効である．

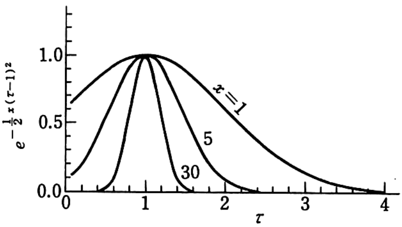
被積分関数の指数 $(-t+x\ln t)$ は，t が 0 から ∞ に動くとき，最初 $-\infty$ の値から増加し，$t_{\max}=x$ で最大となり，そのあと減少して再び $-\infty$ となる．しかしながら，$t_{\max}$ での二階微分をみると $-1/x$ なので，x が増大すると小さくなって，被積分関数は $t_{\max}$ の近傍で平坦になり，ラプラスの方法を適用するのに不向きである．そこで，変数変換 $t=\tau x$ を行ない

$$\Gamma(x+1)=x^{x+1}\int_0^\infty \mathrm{e}^{x(-\tau+\ln\tau)}\,\mathrm{d}\tau \tag{14.6}$$

とする．指数 $x(-\tau+\ln\tau)$ はこんどは $\tau=1$ で最大となり，二階微分は $\tau=1$ で $-x$ となるので，x が増加するとき被積分関数 $f(\tau)=\mathrm{e}^{x(-\tau+\ln\tau)}$ は $\tau=1$ の近傍



(a) $x=1,5,30$ に対する $f(x,\tau)=\mathrm{e}^{x(-\tau+\ln\tau)}$



(b) $x=1,5,30$ に対する $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x(\tau-1)^2}$

図 14.2

でますます尖る形になる(図 14.2(a))．$\tau=1$ の近くでは

$$x(-\tau+\ln\tau)=x\left[-1-\frac{1}{2}(\tau-1)^2+\cdots\cdot\right]$$

なので，$x\to\infty$ のとき，Γ 関数の漸近表示は

$$\Gamma(x+1)\sim x^{x+1}\mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}x(\tau-1)^2\right]\mathrm{d}\tau$$

で与えられよう．ここで下限を $-\infty$ としたのは，積分への寄与は $x\to\infty$ のときほとんど $\tau=1$ の近くに限られ，下限を変更しても新たに加わる寄与は無視できる程度であるからである(図 14.2(b))．このようにすることで積分を実行することができ(演習問題 9 の 1 の(a)参照)，その結果

$$\Gamma(x+1)\sim\sqrt{2\pi x}\,x^x\mathrm{e}^{-x} \tag{14.7}$$

となる．

漸近展開の高次項を得るために，次の変数変換を行なう：

$$-\tau+\ln\tau=-1-\xi^2 \tag{14.8}$$

新しい変数 ξ について τ をテイラー展開の形に表わすと

$$\tau=1+\sqrt{2}\,\xi+\frac{2}{3}\xi^2+\frac{1}{9\sqrt{2}}\xi^3+\cdots\cdot$$

となる．この式は，式(14.8)を τ で微分し，関数 $\tau(\xi)$ のベキ級数の形を仮定して，係数を逐次決める方法で求められる．これらを式(14.6)に代入すると

$$\Gamma(x+1) \sim x^{x+1} \mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x\xi^2} \left(\sqrt{2} + \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{3\sqrt{2}}\xi^2 + \cdots\cdot\right) \mathrm{d}\xi$$

$$\sim \sqrt{2\pi x}\, x^x \mathrm{e}^{-x} \left(1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \qquad (14.9)$$

これが Γ 関数の漸近展開である．特に x が大きな正整数 n のときには，$\Gamma(n+1) = n!$ を使うと

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n \mathrm{e}^{-n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \qquad (14.10)$$

あるいは

$$\ln \Gamma(n+1) \sim \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \frac{1}{2} \ln 2\pi + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

を得る．これはスターリング (Stirling，1730) によって得られたもので，**スターリング**の公式とよばれている．

14.3 鞍点法と最急降下法

最急降下法(method of steepest descent)はラプラスの方法を複素面へ拡張したものである．複素面で積分路を適当に変形し，積分への寄与が主に積分路の限られた部分からくるように修正する．漸近近似では，パラメータ x が大きくなるとき，この寄与がますます大きくなることが必要とされる．複素面では最急降下の積分路は多くの場合，鞍(部)点を含んでおり，そのときは鞍点法(method of saddle-point)とよばれる．

例えば，次の形の積分の漸近展開を $x \to \infty$ に対して求めるとする：

$$f(x) = \int_{\mathrm{C}} \mathrm{e}^{xh(\zeta)} g(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta \qquad (14.11)$$

ここで C は複素 ζ 面での積分路である．ただし $\zeta = \tau + i\sigma$ とする．一般的な方法は，曲線 C を修正して関数 $\mathrm{Re}\, h(\zeta) = f(\tau, \sigma)$ の鞍点を通るように変更し，鞍点からその修正路に沿って離れるに従い，指数関数の部分が急激に減少するようにとることである．このような最急降下の路は同時に，$\mathrm{e}^{xh(\zeta)}$ の偏角が一定の路でもある．というのは，調和関数 $\mathrm{Re}\, h(\zeta)$ の勾配ベクトルは，共役関数 $\mathrm{Im}\, h(\zeta)$ の等高線に接するからである(演習問題 14 の 4)．

$\zeta=\tau+i\sigma$ と書くと，Re $h(\zeta)$ の鞍点の定義は変数 τ および σ についての一階導関数が 0 となることである．複素関数の正則性から，これは $h'(\zeta_0)=0$ を意味する（コーシー・リーマンの関係）．したがって鞍点を考察するときには，Re h ではなく関数 $h(\zeta)$ 自身を考える方が適切である．ζ_0 が鞍点とすると $h'(\zeta_0)=0$ であり，その近くでの $h(\zeta)$ の展開は

$$h(\zeta)=h(\zeta_0)+\frac{1}{2}h''(\zeta_0)(\zeta-\zeta_0)^2+\frac{1}{6}h'''(\zeta_0)(\zeta-\zeta_0)^3+\cdots\cdot \quad (14.12)$$

となる．ここで，$\frac{1}{2}h''(\zeta_0)=a\,\mathrm{e}^{-i\alpha}$，$\zeta-\zeta_0=r\mathrm{e}^{i\theta}$ とおくと

$$\mathrm{Re}\,h(\zeta)=\mathrm{Re}\,h(\zeta_0)+ar^2\cos(2\theta-\alpha)+O(r^3)$$

もし $a\neq 0$ なら $(a>0)$，θ が区間 $(0,2\pi)$ を動いて，ζ が鞍点 ζ_0 のまわりを一周するとき，関数 Re $h(\zeta)$ は

$$\left.\begin{array}{l} 2\text{ つの山}\quad \left(\theta-\dfrac{1}{2}\alpha=0,\ \pi\right)\quad \text{と} \\ 2\text{ つの谷}\quad \left(\theta-\dfrac{1}{2}\alpha=\dfrac{1}{2}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi\right) \end{array}\right. \quad (14.13)$$

を越える（図 14.3）．(τ,σ) 面で，鞍点で直角に交わる 2 つの Re $h(\zeta)$ の等高線があり，また直角に交わる 2 つの Im $h(\zeta)$＝一定の線（破線）がある．これらの組は互いに他を二等分している．Im $h(\zeta)$＝一定の線の 1 つは鞍点の両側で山を上り，他は谷を下る．後者が鞍点に関連した最急降下の曲線 AB である

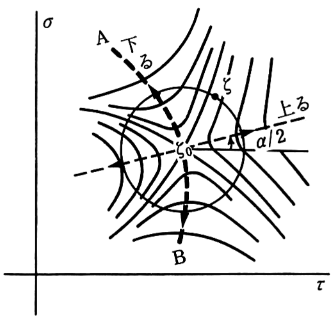


図 14.3　鞍点 ζ_0 の近傍 Re $h(\zeta)$ の等高線（実線）

$(2\theta-\alpha=\pi, 3\pi)$.

積分路Cを最急降下線ABに変形できたとすると，$f(x)$の漸近展開の初項は

$$f(x)\approx g(\zeta_0)\mathrm{e}^{xh(\zeta_0)}\mathrm{e}^{i\theta}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-(ax)r^2}\mathrm{d}r=g(\zeta_0)\mathrm{e}^{xh(\zeta_0)}\mathrm{e}^{i(\alpha+\pi)/2}\sqrt{\frac{\pi}{ax}} \tag{14.14}$$

で表わせる．ここで，$g(\zeta)=g(\zeta_0)+g'(\zeta_0)(\zeta-\zeta_0)+\cdots\cdot$の第1項だけを残した．また積分限界を $\pm\infty$ とした．

ベッセル関数の漸近展開

鞍点法を第一種ハンケル関数 $H_\lambda{}^{(1)}(z)$ に応用してみよう．記述を簡明にするために，zもλも正定数の場合を考える．同様の計算は $H_\lambda{}^{(2)}(z)$ にもできるので，その結果ベッセル関数，ノイマン関数の漸近展開も得られる．

式(13.19)より，$z=x(>0)$ とおくと

$$H_\lambda{}^{(1)}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{L_1}\mathrm{e}^{-ix\sin\zeta+i\lambda\zeta}\mathrm{d}\zeta \tag{14.15}$$

ここで，路L_1は $-\pi+i\infty$ から出発して $0-i\infty$ に向かう路である（図13.2(a)）．指数λは正実数値に固定して，$x\to+\infty$ の場合を考える．

式(14.11)の関数 $h(\zeta)$ として $-i\sin\zeta$ を選ぶ．鞍点は導関数 $-i\cos\zeta$ が0となる点で，$\zeta_0=-\pi/2$ は鞍点であり，しかもL_1上にのっている．$\sin\zeta_0=-1$ であるから，鞍点の近傍で

$$h(\zeta)=i-\frac{1}{2}i(\zeta-\zeta_0)^2+O(|\zeta-\zeta_0|^3)$$

と展開できる．第2項の係数 $-\frac{1}{2}i$ は $\alpha=90°$ を与えるので，最急降下の方向は式(14.13)により鞍点で実軸と $135°$ および $-45°$ の角度をなす．この方向の路すじは $\mathrm{Im}\,h(\zeta)=\mathrm{Im}\,h(\zeta_0)=1$ によっても与えられる．$\zeta=\tau+i\sigma$ とおいて

$$\mathrm{Im}\,h(\zeta)=-\sin\tau\cosh\sigma=1 \tag{14.16}$$

この式から最急降下の路すじ $\tau(\sigma)$ が求められる．ただし $\tau(0)=-\pi/2$．この式で $\sigma=\mathrm{Im}(\zeta)$を0から増加させていくとき，$\tau=\mathrm{Re}(\zeta)$ の値は $(-\pi, 0)$ の範囲で $-\pi/2$ の両側に1つずつ存在するが，値が大きい方は最急上昇の方向となり，$-\pi<\tau\leq-\pi/2$ の根が最急降下の路すじSを与える（図14.4）．式(14.15)の積分路L_1はこの路Sに変形することができる（特異点を横切ることなしに）．

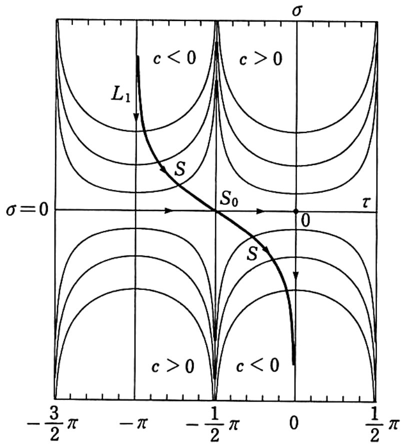


図 14.4　Re $h(\zeta)=\mathrm{Re}[-i\sin\zeta]=\cos\tau\sinh\sigma=c$ の等高線.
最急降下の曲線 S は Im $h(\zeta)=-\sin\tau\cosh\sigma=1$

積分を実行するのに次の変数変換 $(\zeta\to u)$ を行なう：

$$u=-h(\zeta)+i=i\sin\zeta+i=2i\sin\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{1}{2}\left(\zeta-\frac{\pi}{2}\right)\qquad(14.17)$$

ζ の路すじを S 上にとって Im $h(\zeta)=1$ と選ぶと，$u=-\mathrm{Re}\,h(\zeta)=-\cos\tau\sinh\sigma\geq 0$ (なぜなら，$\sigma\geq 0$，$-\pi<\tau\leqq-\pi/2$)．したがって，式(14.16)を使うと

$$u=-\cos\tau\sinh\sigma=\sinh\sigma\tanh\sigma\qquad(14.18)$$

となる．変数 u は S 上で常に実数値をとり，σが 0 から $+\infty$ に増加するとき u もやはり $0\to+\infty$ となり，τ は$-\pi/2\to-\pi$ となる．

式 (14.17) の右辺で $\cos\left(\frac{1}{2}\zeta-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{\pi}{2}\right)$ の関係を使うと，変数 ζ を u で表わす式が得られる ($K^2=1/i$ とする)：

$$\zeta+\frac{\pi}{2}=2\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}Ku^{\frac{1}{2}}\right),\qquad K=e^{i\frac{3}{4}\pi}\qquad(14.19)$$

他方，下半面の S 上では σ：$0\to-\infty$ なので，$-\pi/2\leq\tau<0$ の方の根をとる必要がある．このときにも，u は式(14.18) よりやはり $0\to+\infty$ となる．$\sin^{-1}\alpha$ は主値をとるものとすると，$\alpha\to 0$ のとき $\sin^{-1}\alpha\sim\alpha\to 0$ となる．したがって下半面の S 上では，K は $e^{-i\pi/4}=-e^{i3\pi/4}$，すなわち上式の K を $-K$ とする必要がある ($-45°$ の最急降下の路すじを与えるため)．

新変数に対して積分(14.15)は，上下の各積分を加える形で

$$H_\lambda^{(1)}(x)=\frac{1}{\pi}\int_S e^{ix}e^{-x(i\sin\zeta+i)}e^{i\lambda\zeta}d\zeta$$
$$=-\frac{4}{\pi}e^{ix-i\lambda\pi/2}\int_0^\infty e^{-xu}\cos\left[2\lambda\sin^{-1}\left(\frac{K}{\sqrt{2}}u^{\frac{1}{2}}\right)\right]\frac{d}{du}\left[\sin^{-1}\left(\frac{K}{\sqrt{2}}u^{\frac{1}{2}}\right)\right]du$$

となる($K=e^{i3\pi/4}$)．最後の式で，$(\cos X)dX/du=d\sin X/du$ と書けることを使うと，部分積分ができて

$$H_\lambda^{(1)}(x)=-\frac{2x}{\pi\lambda}e^{ix-i\lambda\pi/2}\int_0^\infty e^{-xu}\sin\left[2\lambda\sin^{-1}\left(\frac{K}{\sqrt{2}}u^{\frac{1}{2}}\right)\right]du \tag{14.20}$$

を得る．関数 $\sin 2\lambda\Theta$ は，次のように $\sin\Theta$ のベキで展開できる（演習問題 14 の 8）：

$$\sin 2\lambda\Theta=\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda+n\right)}{(2n+1)!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda-n\right)}(\sin\Theta)^{2n+1} \tag{14.21}$$

これを上式に代入して，$\Theta=\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}Ku^{\frac{1}{2}}\right)$ を使うと

$$H_\lambda^{(1)}(x)=-\frac{2x}{\pi}e^{ix-i\lambda\pi/2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}n!}{(2n+1)!}C_n(\lambda)\int_0^\infty e^{-xu}\left(\frac{K}{\sqrt{2}}u^{\frac{1}{2}}\right)^{2n+1}du$$

ただし

$$C_n(\lambda)=\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda+n\right)\Big/\left[n!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda-n\right)\right]$$

右辺の積分は $(2K^{2n+1}/(2x)^{n+\frac{3}{2}})\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)$ を与える．さらに，$K^2=-i$ であることを使うと，次の漸近展開を得る：

$$H_\lambda^{(1)}(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}e^{ix-i(2\lambda+1)\pi/4}\sum_{n=0}^{\infty}C_n(\lambda)\left(\frac{i}{2x}\right)^n \tag{14.22}$$
$$\sim\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}e^{i[x-(2\lambda+1)\pi/4]}\left[1+i\frac{(4\lambda^2-1)}{8x}-\frac{(4\lambda^2-1)(4\lambda^2-3)}{2(8x)^2}+\cdots\cdot\right]$$

関数 $H_\lambda^{(2)}(x)$ は $H_\lambda^{(1)}(x)$ の複素共役であることを使うと

$$H_\lambda^{(2)}(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-i[x-(2\lambda+1)\pi/4]}\sum_{n=0}^{\infty}C_n(\lambda)\left(\frac{-i}{2x}\right)^n \tag{14.23}$$

ベッセル関数，ノイマン関数の定義(13.23)を使えば，$J_\lambda(x)$，$N_\lambda(x)$の漸近展開も直ちに得られる：

$$J_\lambda(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\left[A(x)\cos\left(x-\frac{2\lambda+1}{4}\pi\right)-B(x)\sin\left(x-\frac{2\lambda+1}{4}\pi\right)\right] \tag{14.24}$$
$$\sim\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(x-\frac{2\lambda+1}{4}\pi\right)-\frac{4\lambda^2-1}{8x}\sin\left(x-\frac{2\lambda+1}{4}\pi\right)+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$N_\lambda(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\left[A(x)\sin\left(x-\frac{2\lambda+1}{4}\pi\right)+B(x)\cos\left(x-\frac{2\lambda+1}{4}\pi\right)\right] \tag{14.25}$$
$$\sim\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\sin\left(x-\frac{2\lambda+1}{4}\pi\right)+\frac{4\lambda^2-1}{8x}\cos\left(x-\frac{2\lambda+1}{4}\pi\right)+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

ただし

$$A(x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(4\lambda^2-1)(4\lambda^2-3^2)\cdots\cdot[4\lambda^2-(4k-1)^2]}{(2k)!\,(8x)^{2k}}$$

$$B(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(4\lambda^2-1)(4\lambda^2-3^2)\cdots\cdot[4\lambda^2-(4k-3)^2]}{(2k-1)!\,(8x)^{2k-1}}$$

14.4 停留位相の方法

被積分関数が正負の値をとりながらはげしく振動するときには，互いに相殺して，位相が極値をとる点の近傍を除くとほとんど消えてしまい，積分は漸近的に停留位相(stationary phase)の点，あるいは臨界点(微分が 0)の近傍からの寄与で表わされる場合がある．水波の問題を例にとってそれを考察しよう．

エアリ(Airy)の積分は次の形をしている：

$$A_i(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\left(x\zeta+\frac{1}{3}\zeta^3\right)d\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix\zeta}e^{i\frac{1}{3}\zeta^3}d\zeta \tag{14.26}$$

これは水波の形を表わす関数である*．ある時刻に局所的につくられた水波は水面を伝わっていくが，十分離れた点，すなわち十分大きな $x(>0)$ の値では，初期の形によらず，水波のフロントは漸近的に $A_i(x)$ の漸近形に近づく．その

* 巻末文献 9) Linear and Nonlinear Waves 参照．

関数形を求めてみよう．

被積分関数を

$$e^{ixg(\zeta)},\qquad ただし\quad g(\zeta)=\zeta+\frac{1}{3x}\zeta^3$$

と書き，x は十分大と仮定する．これを停留位相の方法で解く問題はケルビンによって考察された．x が大きいとすると，積分への寄与は $g(\zeta)$ の値が停留する点，すなわち

$$g'(\zeta)=1+\frac{1}{x}\zeta^2=0$$

を満たす点 $\zeta_0=\pm i\sqrt{x}$ の近傍が主となろう．他の場所では振動がはげしく，正負の値が打ち消し合って積分すればほとんど消えてしまうであろう．そこで，$\zeta_0=i\sqrt{x}$ として

$$g(\zeta)=g(\zeta_0)+\frac{1}{2}g''(\zeta_0)(\zeta-\zeta_0)^2,\qquad g''(\zeta)=\frac{2}{x}\zeta$$

と近似する．ただし $g(\zeta_0)=i\frac{2}{3}\sqrt{x}$,　$g''(\zeta_0)=i2/\sqrt{x}$．この近似では

$$\begin{aligned}A_i(x)&\sim\frac{1}{2\pi}e^{ixg(\zeta_0)}\int\exp\left[i\frac{1}{2}xg''(\zeta_0)(\zeta-\zeta_0)^2\right]d\zeta\\&\sim\frac{1}{2\pi}\exp\left[-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-\sqrt{x}(\zeta-\zeta_0)^2]d\zeta\end{aligned}\tag{14.27}$$

右辺の積分は，前節の最急降下の積分路に変形すれば直ちに $(\pi/\sqrt{x})^{1/2}$ となることがわかる．このようにして

$$A_i(x)\sim\frac{1}{2\sqrt{\pi}}x^{-\frac{1}{4}}\exp\left[-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right],\qquad x\to+\infty\tag{14.28}$$

を得る．

同様にして，$x=-|x|\to-\infty$ の場合を考える．停留点は $\zeta_0=\pm\sqrt{|x|}$ であることがわかる．この 2 点はいずれも実軸上にあるため，両者からの寄与を考えなければならない．それらを加えた結果として

$$A_i(x)\sim\frac{1}{\sqrt{\pi}}|x|^{-\frac{1}{4}}\sin\left[\frac{2}{3}|x|^{\frac{3}{2}}+\frac{\pi}{4}\right],\quad x\to-\infty\tag{14.29}$$

が得られる（演習問題 14 の 7）．図 14.5 はエアリ関数 $A_i(x)$ を示す．以上のよ

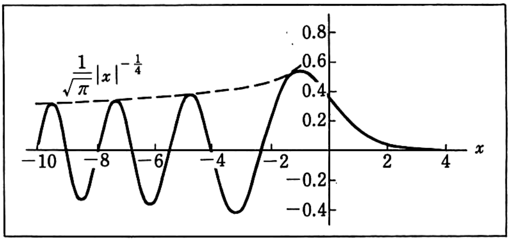


図 14.5　エアリ関数 $A_i(x)$

うに，エアリ関数は前方では指数関数的に減衰するが，後方では振動的であり，伝播する水波のフロントを近似する関数としてよく使われる．

以上の説明からほぼ明らかなように，最急降下の方法と停留位相の方法は，実積分では異なって見えても，複素面での積分になおすと，同じ方法の別の側面に注目した命名になっていることがわかる．一方は位相関数の実部，他方は虚部のふるまいに関するものである．特に，前節の $H_\lambda^{(1)}(x)$ の漸近展開を導くときの条件式(14.16)は停留位相そのものである．

14.5　特異点とフーリエ積分変換

最後に，複素面上の特異点が，積分変換の結果どのような性質を示すか考えてみよう．このことから，実軸上の実数値関数のふるまいと複素面上の特異点との関係に関する興味ある性質が導かれる．

関数 $f(z)$ は上半面 $(\mathrm{Im}\, z>0)$ の z_1 に n 位の極(留数 A_1)，z_2 に ν 位の分岐点を有すると仮定する．すなわち

$$\left.\begin{aligned} &f(z)\to\sum_{m=1}^{n}a_m(z-z_1)^{-m}, && (z\to z_1)\\ &f(z)\to(z-z_2)^{\nu}\sum_{p=0}^{\infty}b_p(z-z_2)^{p}, && (z\to z_2)\end{aligned}\right\}\tag{14.30}$$

とする．ここで n は正整数，$\mathrm{Re}\,\nu>-1$ とする．

次のフーリエ型の積分変換(R は実軸)を考える：

$$I(k)=\int_R \mathrm{e}^{ikz}f(z)\,\mathrm{d}z \tag{14.31}$$

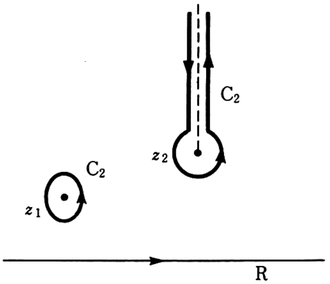


図 14.6 積分路の変更

ここで，k は正実数で十分大きい数とする．また $|z|$ が十分大きくなると，$|f(z)|$ は上半面で一様に 0 となるとする．このとき，コーシーの積分定理およびジョルダンの補助定理によって積分路を図 14.6 の C_1，C_2 に変更できる．

$$I(k)=\int_{C_1} e^{ikz}f(z)\,dz+\int_{C_2} e^{ikz}f(z)\,dz \tag{14.32}$$

最初の積分 I_1 は，留数定理から単に

$$I_1=2\pi i a_1 e^{ikz_1} \tag{14.33}$$

を与える．第 2 項の積分を I_2 と書くと

$$I_2=\int_{C_2} e^{ikz}(z-z_2)^{\nu}\left(\sum_{p=0}^{N} b_p(z-z_2)^p+\cdots\cdot\right)dz$$

z_2 を回る小円上の積分は $\mathrm{Re}\,\nu>-1$ の条件のために消える．C_2 の分岐カットの右，左の径路上で，それぞれ $z-z_2=y\,e^{i\frac{\pi}{2}}$，　$z-z_2=y\,e^{i\left(\frac{\pi}{2}-2\pi\right)}$ とおくと

$$\begin{aligned}I_2&=(1-e^{-i2\pi\nu})\,e^{ikz_2+i\frac{\pi}{2}\nu}\int_0^{\infty}e^{-ky}\,y^{\nu}\left[\sum_{p=0}^{N}a_p(iy)^p+\cdots\cdot\right]i\,dy\\&=-2(\sin\nu\pi)\,e^{ikz_2-i\frac{1}{2}\nu\pi}\left[\sum_{p=0}^{N}a_p\,i^p\int_0^{\infty}e^{-ky}y^{\nu+p}dy+\cdots\cdot\right]\end{aligned}$$

したがって，十分大きい k の値に対する漸近展開として

$$I_2\sim-\frac{2\sin\nu\pi}{k^{\nu+1}}\exp\left[i\,k\,z_2-i\frac{1}{2}\nu\pi\right]\sum_{p=0}^{\infty}a_p\left(\frac{i}{k}\right)^p\Gamma(p+\nu+1) \tag{14.34}$$

を得る．

特異点の位置 z_1, z_2 は I_1, I_2 いずれの積分にも e^{ikz_1}, e^{ikz_2} の形で含まれてい

る．いま，$z_p=\alpha_p+i\beta_p\,(p=1,2\,;\,\beta_p>0)$ とおくと

$$\mathrm{e}^{-k\beta_1}\mathrm{e}^{ik\alpha_1}, \qquad \mathrm{e}^{-k\beta_2}\mathrm{e}^{ik\alpha_2}$$

の形となる．

極あるいは分岐点がそれぞれ複数個あったとしても全く同様の結果が得られる．このことから積分への寄与が大きいのは，実軸に最も近い特異点，すなわち虚部 $\beta(>0)$ が最も小さい特異点であることがわかる．いまそのような点が z_1 だったとし，さらに $n=1$ とする．このとき関数 $f(z)$ は実軸上 $(z=x)$ で

$$f(x)\sim\frac{a_1}{x-z_1}=a_1\frac{x-\alpha_1-i\,\beta_1}{(x-\alpha_1)^2+{\beta_1}^2}$$

となり，特異点に最も近い点 $x=\alpha_1$ で $f(x)$ は大きな値をとることになる．

演習問題 14

1．積分余弦関数は

$$C_i(x)\int_x^{\infty}\frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t$$

で定義される．次の漸近展開を示せ：

$$C_i(x)\sim(\sin x)\left[-\frac{1}{x}+\frac{2!}{x^3}-\frac{4!}{x^4}+\cdots\cdot\right]+(\cos x)\left[\frac{1}{x^2}-\frac{3!}{x^4}+\frac{5!}{x^6}-\cdots\cdot\right]$$

2．次の積分について十分大きな x に対する漸近展開を部分積分によって求めよ：

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{ixt}\,t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$$

3．関数 $y(x)$ に対する微分方程式

$$y''+\left(1+\frac{1}{x^2}\right)y=0$$

は実数で正の大きな x に対し $y\sim\mathrm{e}^{\pm ix}$ となることを示唆する．次の形の漸近展開

$$y\sim\mathrm{e}^{\pm ix}\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots\cdot\right)$$

を仮定して微分方程式に代入し，係数を決定せよ．

4．正則関数 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)\quad(z=x+iy)$ において，実部 u の勾配ベクトル (u_x, u_y) は虚部の等高線 $v(x,y)=$ 一定の曲線に接することを証明せよ．

5．式(14.11)の関数 $f(x)$ の漸近展開(14.14)は $h''(\zeta_0)$ を使ったら，どのように表わせるか．また $h''(\zeta_0)=0$，$h'''(\zeta_0)\neq0$ の場合には，$f(x)$ の漸近展開はどのように与えられるか．

6．整数 n 次の修正ベッセル関数 $I_n(x)$ は

$$I_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{e}^{-in\pi/2}\int_{\mathrm{C}}t^{-n-1}\,\mathrm{e}^{i\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)}\mathrm{d}t$$

で与えられる．ここでCは原点を正の向きに回る閉曲線である．x が実数で正の大きな値に対する $I_n(x)$ の漸近展開を最急降下法によって求めよ．

7．エアリ関数 $A_i(x)$ が，$x\to-\infty$ において次の漸近形で表わされることを示せ(式(14.29))：

$$A_i(x)\sim\sqrt{\pi}\,|x|^{-\frac{1}{4}}\sin\left(\frac{2}{3}|x|^{\frac{3}{2}}+\frac{\pi}{4}\right)$$

8．関数 $\sin 2\lambda\Theta$ の次の展開式を証明せよ：

$$\sin 2\lambda\Theta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}\lambda\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda+n\right)}{(2n+1)!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda-n\right)}(\sin\Theta)^{2n+1}$$

9．関数 $H_\lambda^{(1)}(z)$ は z の負の虚軸上で，関数 $H_\lambda^{(2)}(z)$ は正の虚軸上で，$|z|$ が増大するときいずれも限りなく増大することを示せ．

演習問題略解

演習問題 1

1．式(1.6)で $z_1=z_2=re^{i\theta}$ とすると，$z^2=r^2e^{i2\theta}$．一般に $z^n=r^ne^{in\theta}$ と書ける．次に式(1.9)を使って式(1.10)が示せる．$x_1x_2+y_1y_2=r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)$, $y_1x_2-x_1y_2=r_1r_2\sin(\theta_1-\theta_2)$，$x_2{}^2+y_2{}^2=r_2{}^2$ であるから，$z_1/z_2=(r_1/r_2)(\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2))$ となる．

2．$z_1{}^n/z_2{}^m=(r_1{}^n/r_2{}^m)e^{i(n\theta_1-m\theta_2)}$，$\bar{z}_1{}^n=r_1{}^ne^{-in\theta_1}$，$\bar{z}_2{}^m=r_2{}^me^{-im\theta_2}$ を使えば示せる．

3．各辺を2乗することで両不等式は示せる．等号がなりたつのは，$z_1, z_2, z_3, \cdots\cdot$ の偏角が 2π を法(mod)として等しいとき．

4．$c=\alpha e^{i\beta}$，$z=re^{i\theta}$ の極形式で表すとき $r^n=\alpha$，$n\theta-\beta=2\pi k(k=0, 1, \cdots\cdot, n-1)$．$c=1$ のときは $r=1$ で，$\theta=2\pi k/n(k=0, \cdots\cdot, n-1)$．

5．$1+z+z^2+\cdots\cdot+z^n=(1-z^{n+1})/(1-z)$ の実部は $(1+r\cos\theta-r^{n+1}\cos(n+1)\theta-r^{n+2}\cos(n+2)\theta)/(1-2r\cos\theta+r^2)$．後半はその虚部に等しく，$(r\sin\theta-r^{n+1}\sin(n+1)\theta-r^{n+2}\sin(n+2)\theta)/(1-2r\cos\theta+r^2)$ で与えられる．

6．(前半) 上に有界だから上限 α が存在する(§1.4)．つまり $\forall x_n: x_n\leq\alpha$，かつ $\exists x_m: \alpha-\varepsilon<x_m$ for $\forall\varepsilon>0$．これと単調増加性から $\forall\delta>0$ に対してある自然数 m が存在して $n\geq m$ ならば $\alpha-\delta<x_n\leq\alpha$ すなわち $\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$

7．有界閉区間 $[a, b]$ を N 等分すると，そのいずれかに無限集合が含まれる．その部分区間から1点を選び x_1 とする．この区間をさらに N 等分し，無限集合を含む区間から1点を選び x_2 とする．このように $\{x_m\}$ を定義すると，$\forall\varepsilon$ に対し $\exists m$ で $p, q\geq m$ に対して

$$|x_p-x_q|\leq|b-a|\left(\frac{1}{N}\right)^m<\varepsilon$$

となる．これより，$\{x_m\}$ はコーシー列となるので $\{x_m\}$ は収束部分列となり，集積点 $\lim_{m\to\infty}x_m$ が存在する．

8．(i) $a=1$ では明らか．$a\neq1$ のときは有界単調性より収束．そこで $0<a<1$

のとき $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n+1]{a}<1$ であるのに，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1-h(h>0)$ とすると矛盾．$a>1$ のときも同様．

（ii）$k\geqq 2a$ なる自然数 k をとり $\dfrac{a^k}{k!}=c$ とする．$\varepsilon>0$ に対して $n>\dfrac{c\cdot 2^k}{\varepsilon}$ かつ $n>k$ としておくと $\dfrac{a^n}{n!}=c\cdot\dfrac{a}{k+1}\,\dfrac{a}{k+2}\cdots\cdots\dfrac{a}{n}<c\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdots\cdots\dfrac{1}{2}<c.$ $\dfrac{2^k}{2^n}<c\cdot\dfrac{2^k}{n}<\varepsilon.$

9. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}>\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x=\int_{\ln 2}^{\infty}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$　$(x=\mathrm{e}^t)$ より発散．

10. $\displaystyle\frac{1}{n+1}<\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}<\frac{1}{n}$ から，$s_n>0$ と $\dfrac{1}{n+1}+\log n-\log(n+1)<0$ を示し，s_n が単調減少して下に有界であることを示す．

11. (前半)式(A)から $\{a_nu_n\}$ が単調減少で下に有界であることが示せるので，コーシーの条件より，$^\forall\varepsilon>0$ に対して $^\exists N\,;\,^\forall m>{}^\forall n>N\to a_nu_n-a_mu_m<\alpha\varepsilon$. さて，$\displaystyle\sum_{k=n}^{m-1}(a_ku_k-a_{k+1}u_{k+1})\geqq\sum_{k=1}^{m-1}(\alpha u_{k+1})$ つまり $a_nu_n-a_mu_m\geqq k(u_{n+1}+\cdots\cdots+u_m)$. 以上より，$^\forall\varepsilon>0$ に対して，$^\exists N\,;\,^\forall m>{}^\forall n>N\to u_{n+1}+\cdots\cdots+u_m<\varepsilon$. ゆえに $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ は収束する．(後半) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ が発散 $\rightleftarrows\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}>1$．一方，$n$ が大きいとき $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\geqq\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$. つまり $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ は発散する．

12. 含まれている正の項を順に $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$，負の項を順に $-b_1, -b_2, -b_3, \cdots\cdots$ とする．条件収束であるから，$\{a_n\}\{b_n\}$ は発散する（ともに収束すれば絶対収束，一方のみが収束するなら $\{u_n\}$ は発散）．$\{u_n\}$ は収束するわけで $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ $\lim_{n\to\infty}b_n=0$. さて $c\geqq 0$ の場合を考える．$c\leqq a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{i_1}\leqq c+a_{i_1}$ となるよう i_1 を定める．次に $c-b_{j_1}<a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{i_1}-(b_1+b_2+\cdots\cdots+b_{j_1})\leqq c$ となるよう j_1 を定める．次に $c\leqq(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{i_1})-(b_1+b_2+\cdots\cdots+b_{j_1})+(a_{i_1+1}+a_{i_1+2}+\cdots\cdots+a_{i_2})\leqq c+a_{i_2}$ となるよう i_2 を定め$\cdots\cdots$というふうにして $i_1, j_1, i_2, j_2, \cdots\cdots$ を決めていく．すると $\{u_n\}$ を並べかえた $a_1, a_2, \cdots\cdots a_{i_1}, -b_1, -b_2, \cdots\cdots -b_{j_1}, a_{i_1+1}, a_{i_1+2}, \cdots\cdots a_{i_2}, -b_{j_1+1}, \cdots\cdots$ は，c に収束することがわかる．

演習問題 2

1. x をこえない最大の整数を n とすると $\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}.$

この各辺の極限をとる.

2. $p=qx$ として示す.

3. (i) $h=\dfrac{1}{p}$ とおくと $\lim_{h\to+0}\dfrac{1}{h}\ln(1+h)=\lim_{p\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{p}\right)^p=\ln e=1$ (∵ ln の連続性). また $p+1=-r$ とおいて, $\lim_{h\to-0}\dfrac{1}{h}\ln(1+h)=\lim_{r\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{r}\right)^{r+1}=1$

(ii) 中辺分子が $\ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)$ となることと (i) を使う.

(iii) (左辺) $=e^x\lim_{h\to0}\dfrac{1}{h}(e^h-1)$. $e^h=1+t$ とおいて $\lim_{h\to0}\dfrac{1}{h}(e^h-1)=\lim_{t\to0}\dfrac{t}{\ln(1+t)}=1$ ((i) により).

(iv) (iii) の関係を満たすことと右辺(テイラー展開)の収束性を調べよ.

(v) (iv) より自明.

4. (i) $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=1$, すなわち $e^{2iz}+1=2e^{iz}$ より $z=2n\pi$ (n：整数).

(ii) 同様にして $z=2n\pi i$.

5. $x=0$ で発散, $x\neq0$ に対しては 0 に収束する (∵ $\alpha<\varepsilon x^2$ とすると (与式) $<\varepsilon$). 正の定数 k に対し $x\geq k$ の範囲で一様収束する (∵ 正数 δ を与えたとき, $x\neq0$ なる任意の x に対して $\dfrac{\alpha}{\alpha^2+k^2}<\delta$ を満たす小さな正数 α をとれば (与式) $<\delta$).

6. $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ が I で一様収束 $\rightleftarrows$ $\forall\varepsilon>0$ に対して $\exists N$; $\forall m>\forall n\geq N\to\left|\sum_{k=n+1}^{m}f_k(x)\right|<\varepsilon$ for $\forall x\in I$ ――(A) であるが, このことから「$|a_k(x)|\leq c_k$ for $\forall x\in I$ で, $\sum_{k=1}^{\infty}c_k$ が収束するなら $\sum_{k=1}^{\infty}a_k(x)$ は I で一様絶対収束する (ワイエルシュトラス)」が導ける. これを使えば $1+\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{3^p}+\cdots\cdots$ の収束性に関する1章の結果に注意して, 求める z の範囲が $\mathrm{Re}\,z>1$ であることがわかる.

7. 収束半径は 0 (式(2.9)を使う).

8. (i) $F(-a,b,b\,;-z)=1+az+\dfrac{1}{2!}a(a-1)z^2+\dfrac{1}{3!}a(a-1)(a-2)z^3+\cdots\cdots$
a が自然数のときは二項定理により $=(1+z)^a$ であり, そうでないときも5章に学ぶテイラー展開により $=(1+z)^a$ となる.

(ii) $\sin^{-1}z$ の, ある分枝をテイラー展開すると, $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!\,z^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}$ となる (なお $(2n-1)!!=(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\cdots\cdot1$, $(2n)!!=2n\cdot(2n-2)\cdot\cdots\cdot2$).

9. ベキ級数 $\sum a_nz^n$ を $a_0+z(a_1+a_2z+\cdots\cdots)$ と書くとき, ( ) 内のベキ級数は元のベキ級数と同じ収束性をもつので, これを a_0+zM と書く. M は有界な数で

ある．z が与えられた点列上で原点に近づくとき，第2項は限りなく小さくなるので $a_0=0$ でなければならない．したがって $a_1+a_2z+\cdots\cdots$ も点列上で0でなければならない．以上の議論をくり返せば，すべての $a_n=0$．

10．(i)　$\mathrm{Re}\,a>1$ のとき．n が十分大きいとすると，$|c_n/c_{n+1}|\geqq 1+\alpha/n\ (\alpha>1)$．これとラーベの判定法(演習問題1の11)より $\sum_n|c_n|$ は収束．これと $|\sum_n c_nz^n|\leqq\sum_n|c_n|\ (|z|=1)$ より $|\sum_n c_nz^n|$ が収束．

(ii)　$\mathrm{Re}\,a=0$ のとき，$|c_{n+1}/c_n|=|1-i\beta/n-A(n)/n^\lambda|=1-B(n)/n^\delta\ (\delta>1,\ |B|<M$(有界))．$n$，$m$ が十分大きければ，$|c_{n+1}/c_n|>1-M/n^\delta$ なので

$$\left|\frac{c_n}{c_m}\right|=\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|\cdot\cdots\cdots\cdot\left|\frac{c_{m+1}}{c_m}\right|>\prod_{\nu=m}^{\infty}\left(1-\frac{M}{\nu^\delta}\right)=D>0$$

(右辺の無限積の収束性については§10.2の定理を参照のこと)．つまり $|c_n|>D|c_m|$．このことは十分大なる n に対し，$|c_n|$ は常にある正数 $(D|c_m|)$ より大きいことを示し，$n\to\infty$ のとき $|c_nz^n|\to 0$ とはならないから $\sum_n c_nz^n$ は発散する．$\mathrm{Re}\,a<0$ のとき．$|c_{n+1}z^{n+1}/c_nz^n|=|c_{n+1}/c_n|>1+\dfrac{\alpha}{n}$ (α は正定数，n は十分大)．十分大なる n，$m(n>m)$ に対し，$|c_{n+1}|>\left(1+\dfrac{\alpha'}{n}\right)\cdots\cdot\left(1+\dfrac{\alpha'}{m+1}\right)|c_{m+1}|>\left(1+\dfrac{\alpha'}{n}\right)^{n-m}|c_{m+1}|$．これより十分大なるすべての n に対し $|c_n|>K$ (n によらない正数)が示せるので $|c_nz^n|\to 0\ (n\to\infty)$ とならず，したがって $\sum_n c_nz^n$ は発散する．

(iii)　$0<a_r\leqq 1\ (a_r=\mathrm{Re}\,a)$ のとき．$|c_{n+1}/c_n|\leqq 1-\dfrac{\alpha}{n}\ (\alpha>0,\ n$ は十分大)．ゆえに $|c_n|$ は下に有界な単調減少数列なので，$n\to\infty$ で $|c_n|\to\xi\ (\geqq 0)$．このとき $\sum_{n=0}^{\infty}(|c_n|-|c_{n+1}|)$ は収束する($\because\ \sum_{m=0}^{n}(|c_m|-|c_{m+1}|)=|c_0|-|c_{n+1}|$)．一方

$$\frac{|c_n-c_{n+1}|}{|c_n|-|c_{n+1}|}=\frac{|1-c_{n+1}/c_n|}{|-1|c_{n+1}/c_n|}\leqq\frac{|a_r/n+A/n^\lambda|}{\alpha/n}\to\frac{a_r}{\alpha}\ (n\to\infty)$$

だから，十分大なる n に対し

$$|c_n-c_{n+1}|\leqq K(|c_n|-|c_{n+1}|),\quad (K\text{ は }n\text{ によらない定数})$$

したがって式(1.24)により $\sum_n^{\infty}|c_n-c_{n+1}|$ は収束する．他方

$$\left|\frac{c_n}{c_m}\right|<\left(1-\frac{\alpha}{n-1}\right)\cdot\cdots\cdots\cdot\left(1-\frac{\alpha}{m}\right)$$

であるから，§1.3の結果に注意すると，§10.2の定理(無限積の発散性)

より $n\to\infty$ で $|c_n/c_m|\to 0$，それゆえ $|c_n|\to 0$．ここで

［補題］ $\sum_n (c_n - c_{n+1})$ が絶対収束し，$c_n\to 0(n\to\infty)$ で $\sum_n z^n < M$（有界）ならば $\sum_n c_n z^n$ は収束する．

［証明］ $A_n = \sum_{m=1}^{n} z^m (A_0=0)$ を定めると，$c_m z^m = c_m(A_m - A_{m-1}) = A_m(c_m - c_{m+1}) - A_{m-1}c_m + A_m c_{m+1}$ より $\sum_{m=1}^{n} c_m z^m = \sum_{m=1}^{n} A_m(c_m - c_{m+1}) + A_n c_{n+1}$．仮定より，$|A_n|<M$ なので，$\sum_m A_m(c_m - c_{m+1})$ も絶対収束する．一方，$c_n\to 0(n\to\infty)$ より $A_n c_{n+1}\to 0$（証明終）．

ところでこの問題においては，$|z|=1$，$z\neq 1$ のとき $\left|\sum_{m=1}^{n} z^m\right| = \left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \leq \frac{1}{|1-z|}$ より $\sum_n z^n$ が有界となる．

以上により（iii）が証明された．

11．10．を使えば $\mathrm{Re}[\gamma-\alpha-\beta]>0$

12．複素平面上では $z=\pm 1$ を結ぶ線を分岐カットとし，これを横切ることを考えないという約束で w は一意的関数となる（なお分岐点 $z=\pm 1$ のうち，一方を 2 周すればもとの面にもどるとしたリーマン面上で w は一意的関数となる）．

13．$w_{n+2} - w_{n+1} = \gamma_{n+1}$，$w_{n+3} - w_{n+2} = \gamma_{n+2}$，$\cdots\cdots$，$w_{n+k} - w_{n+k-1} = \gamma_{n+k-1}$，$w_{n+k} = \gamma_{n+k}$ とすると，$\left|\sum_{l=1}^{k} c_{n+l} w_{n+l}\right| = |c_{n+1}\gamma_{n+1} + (c_{n+1}+c_{n+2})\gamma_{n+2} + \cdots\cdots + (c_{n+1} + \cdots\cdots + c_m)\gamma_m| < \varepsilon|\gamma_{n+1} + \cdots\cdots + \gamma_m|$　$(\varepsilon>0)$　（$\because$ $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ の収束とコーシーの定理）で $|\gamma_{n+1} + \cdots\cdots + \gamma_m| < |\gamma_{n+1}| + \cdots\cdots + |\gamma_m| < k_1 + k_2$．したがって，問 6 解答中に述べた（A）により，$\sum_{n=1}^{\infty} c_n w_n(x)$ は $a\leq x\leq b$ で一様収束する．

演習問題 3

1．$z=x+iy=re^{i\theta}$，$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ と表わして直接確かめる（問題 7 参照）．（i）$u=e^x\cos y$，$v=e^x\sin y$，　（ii）$u=\ln r$，$v=\theta$，　（iii）$u=r^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}\theta$，$v=r^{\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{2}\theta$．

2．$f(z)=u$（u：実関数）とおくと，$f(z)$ が正則⇒コーシー・リーマンの関係：$u_x=0$，$u_y=0$（$v=0$ だから）⇒ゆえに，$u=\mathrm{const}$．

3．（i）$(\ln a)a^z$，　（ii）$z^z(\ln z+1)$，　（iii）$\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$，　（iv）$\dfrac{1}{\sqrt{z^2-1}}$．

4．z_0 で正則 → $|f(z)-f(z_0)|<(\varepsilon+|f'(z_0)|)|z-z_0|$．$|f'(z_0)|$ は有界だから，$|f'(z_0)|<M$．したがって，$|z-z_0|<\delta$ に対し $|f(z)-f(z_0)|<(\varepsilon+M)\delta$．

5. $\dfrac{\partial^2}{\partial z\partial \bar{z}}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)=\dfrac{1}{4}\triangle$.

6. 直接計算で確かめる．(a) $\sin z$，(b) $\dfrac{2A}{A-z}$.

7. コーシー・リーマンの関係を

$$\frac{\partial}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},\quad \frac{\partial}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

を用いて書き直す．

8. $\dfrac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}z^2}$，$\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}$ をべき級数で表わして，z^n の係数が 0 になることを確かめる．

演習問題 4

1. (i) $\displaystyle\oint_{c_0}\frac{\mathrm{d}z}{z}=\oint_{c_0}\frac{\mathrm{d}r}{r}+\oint_{c_0}i\mathrm{d}\theta=0+2\pi i=2\pi i$.

(ii) $\displaystyle\oint_{c_0}\frac{\mathrm{d}z}{z}=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{i\theta})}{\mathrm{e}^{i\theta}}=i\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi i$.

2. 値は $-\dfrac{1}{\sqrt{2}e}+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}e}+\dfrac{1}{e^2}\right)i$. 後半は $\left|\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}+i}^{\pi+2i}\mathrm{e}^{iz}\mathrm{d}z\right|\leqq\dfrac{1}{e}\sqrt{\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)^2+1}=\dfrac{1}{e}L$,

$L=\left(\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)^2+1\right)^{\frac{1}{2}}$ は両端の直線距離．

3. $f(z)$ が正則でないのは $z=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ で，これは円 $|z|=\dfrac{1}{2}$ の外側．よってコーシーの積分定理より 0.

4. $2i\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}}=i\dfrac{\partial}{\partial x}-\dfrac{\partial}{\partial y}$ とグリーンの定理(4.28)で，$P=-u-iv$，$Q=-v+iu$ とした式より導かれる．

5. 4.を利用．$f(z)=F(z,\bar{z})$ としたとき $\partial F/\partial\bar{z}=0$.

6. 式(4.28)で $Q=u\dfrac{\partial v}{\partial x}$，$P=-u\dfrac{\partial v}{\partial y}$ とおけば式(4.37)となる．式(4.38)は式(4.37)より明らか．さらに式(4.38)で $v=-1$，$\Delta u=0$ (u は調和関数)とすれば $\displaystyle\oint_c\frac{\partial u}{\partial n}=0$ となる．

7. $\mathrm{Im}(f'(z)\mathrm{d}z)=u_x\mathrm{d}y-u_y\mathrm{d}x=\dfrac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s$ と 6.より示される．

演習問題 5

1. (i) $\dfrac{\pi}{2}\left(\sqrt{e}-\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$,　(ii) 0.

2. 最大値の原理より $|z|=1$ 上で探せばよい.

 (i) $\dfrac{1}{2}\left(e-\dfrac{1}{e}\right)$ $(z=\pm i)$,　(ii) $\dfrac{\pi}{2}$ $(z=\pm 1)$.

3. (i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{2(n+1)\pi}{3}\right)z^n$ (部分分数に分けて展開)

 (ii) $\displaystyle\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\sin\left(\frac{3n}{4}\pi\right)$ $(z-1)^n$　($(\tan^{-1}z)'$ を $z_0=1$ の周りで展開して積分)

 (iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)_{-n}(i\pi)^{\frac{1}{2}-n}$ $(z-i\pi)^n$　($f^{(n)}(z_0)$ を計算)

 ただし $\displaystyle\left(\frac{1}{2}\right)_{-n}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\cdots\cdots\cdot\left(\frac{1}{2}-n+1\right)$

4. (i) e^z の級数表現 $\sum z^n/n!$ を代入すれば式(2.20)の左辺が得られる.

 (ii) $z\cot z=iz+\dfrac{2iz}{e^{2iz}-1}$ より, (i)の結果を使う.

 (iii) $\tanh z=1-\dfrac{1}{e^{2z}-1}+\dfrac{2}{e^{4z}-1}$ より, (i)を使う.

5. $F(z)=u+iv$ としたとき, $\oint_C F(z)dz=0$ は $\oint(udx-vdy)=\oint(vdx+udy)=0$ を意味する. これより

$$\frac{\partial U_1}{\partial x}=u,\ \frac{\partial U_1}{\partial y}=-v,\ \frac{\partial U_2}{\partial x}=v,\ \frac{\partial U_2}{\partial y}=u$$

 となる関数が存在する. この式よりコーシー・リーマンの関係が導かれる.

6. (i) $f_n(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$ として, 一様収束性から定理が使える.

 (ii) $\displaystyle\oint_C\lim_{n\to\infty}f_n(z)=\lim_{n\to\infty}\oint f_n(z)dz=0$.

7. 各項 u_k に対し $\oint u_k(z)dz=0$ だから, 任意の N に対し $\displaystyle\oint\sum_{k=1}^{N}u_k(z)dz=0$.

8. 前問 7. より正則性がいえる. 正則ならば, ベキ級数展開は一意.

9. $g(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)}{z} & z\neq 0\\ f'(0) & z=0\end{cases}$ に対し最大値の原理を使う.

 後半は, $g(z)$ について等号が内点でなりたつとすると内点で最大値をとること

になるが，これは $g(z)$ が定数のみ可能.

10．$u(r,\phi)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}u_c(\theta)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\phi-\theta)+r^2}\mathrm{d}\theta$

11．ポアソンの公式により，D の境界で u に一致する調和関数 v がつくれる．$u-v$ も平均値定理を満たすので最大値の原理が使えて，$u-v$ が境界上で 0 であることから D 内で $u-v=0$. よって $u=v$ は調和関数.

12．ポアソンの公式(5.10)において

$$\frac{R-r}{R+r}\leqq\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\phi-\theta)+r^2}\leqq\frac{R+r}{R-r}$$

と $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}u_c(\theta)\mathrm{d}\theta=u(0)$　(平均値の定理)より導かれる.

13．$I=\displaystyle\int(u_x{}^2+u_y{}^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ とおくと

$$\delta I=2\varepsilon\int_{\mathrm{D}}\{(u_0)_xh_x+(u_0)_yh_y\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\varepsilon^2\int(h_x{}^2+h_y{}^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

ここで，グリーンの公式より

$$\int\{(u_0)_xh_x+(u_0)_yh_y\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int h\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\oint h\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s$$

$\Delta u=0$ (u は調和)，境界で $h=0$ だから

$$\delta I=\varepsilon^2\int(h_x{}^2+h_y{}^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqq 0.$$

演習問題 6

1．K_1：$f(z)=\dfrac{1}{2z}+\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right\}z^n$

K_2：$f(z)=\dfrac{1}{2z}-\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}z\right)^n$

K_3：$f(z)=\dfrac{1}{2z}-\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n$

2．$\dfrac{1}{\sin z}=\dfrac{1}{z}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2^{2n}-2)}{(2n)!}B_{2n}z^{2n-1}$

3．$z=\pm\sqrt{n\pi}$ が特異点．このうち $n=0$ が 2 位の極，ほかは 1 位の極.

4．$|z|>1$ では展開できない.

理由：$z=\pm1$ を含む閉曲線について一周するとき 2π のずれが生じ一価でなくなる．$|z|<1$ では正則なのでテイラー展開可能.

5. $\dfrac{f(a)}{g'(a)}$. (i) $(1+a^2)f^{(m-1)}(a)+2(m-1)af^{(m-2)}(a)+(m-1)(m-2)f^{(m-3)}(a)$

(ii) $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mp kd}$

6. $z=0$: $\dfrac{1}{2\pi i}\oint(-\overline{f(\zeta)})\mathrm{d}\zeta=-\dfrac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}A_n\int_0^{2\pi}\bar{\zeta}^n\zeta i\,\mathrm{d}\theta=-A_1=-\overline{f'(0)}$

$0<|z|<1$: $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1}\dfrac{\overline{f(\zeta)}}{z\zeta-1}\mathrm{d}\zeta=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\text{逆まわり}}\dfrac{\dfrac{\overline{f(\zeta)}-\overline{f(0)}}{\bar{\zeta}}}{(\bar{\zeta}-z)}\mathrm{d}\bar{\zeta}=\dfrac{1}{z}(\overline{f(0)}$

$-\overline{f(\bar{z})})$ $\left(\dfrac{\overline{f(\zeta)}-\overline{f(0)}}{\bar{\zeta}}\text{ が正則}\right)$

$|z|>1$: $\dfrac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\dfrac{\overline{f(\zeta)}}{1-\dfrac{1}{z\zeta}}\dfrac{1}{z\zeta}\zeta i\mathrm{d}\theta=\dfrac{1}{2\pi z}\int_0^{2\pi}\sum_{n,m=0}^{\infty}\dfrac{\overline{f^{(n)}(0)}}{z^m}\zeta^{-n-m}\mathrm{d}\theta=\dfrac{\overline{f(0)}}{z}$

7. 任意の有限の値に収束する点列をもつから，無限に発散する数列 $\{A_n\}$ をもってきて，各 A_k に収束する点列の k 番目を z_k として新しい数列をつくればよい．

8. $J_n(t)=\dfrac{\partial^n}{\partial z^n}F(z,t)\Big|_{z=0}=\dfrac{1}{2\pi i}\oint \mathrm{e}^{\frac{t}{2}\left(z-\frac{1}{2}\right)}\dfrac{\mathrm{d}z}{z^{n+1}}$

$(z=\mathrm{e}^{i\theta})=\dfrac{1}{2\pi i}\oint \mathrm{e}^{it\sin\theta}(\mathrm{e}^{-i\theta})^{n+1}\mathrm{e}^{i\theta}i\,\mathrm{d}\theta=\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{i(t\sin\theta-n\theta)}\mathrm{d}\theta$

$=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\theta-t\sin\theta)\mathrm{d}\theta$

(明らかに $J_{-n}(t)=(-1)^nJ_n(t)$)

9. $G(r)=r^{-\alpha}M(r)$

$G(r_1)=G(r_3)$ とおいて対数をとると

$$-\alpha\ln r_1+\ln M(r_1)=-\alpha\ln r_3+\ln M(r_3)\qquad\therefore\quad \alpha=\frac{\ln M(r_3)-\ln M(r_1)}{\ln r_3-\ln r_1}$$

最大値の原理から $(0<)G(r)\leq G(r_1)(=G(r_3))$ これの対数をとって書き直すと問題の式が得られる．

演習問題 7

1. 1つの極または零については式(7.3), (7.4)がある．あとは積分曲線を拡張するだけ．

2. $\sum_i m_i h(a_i)-\sum_j n_j h(b_j)$ （a_i, b_j は極，零の点）．

3．ラグランジュの公式より

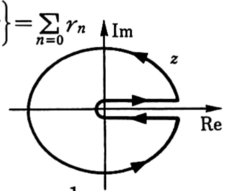
$$na_n=\frac{1}{(n-1)!}\left\{\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\left[\frac{z^n}{(z\mathrm{e}^{az})^n}\right]\right\}_{z=0} \qquad \therefore\ a_n=\frac{1}{n!}(-an)^{n-1}$$

収束半径は

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n-1}=\frac{1}{ae}$$

4．図のように積分曲線をとって留数定理を使うと

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_0^\infty(-z)^{\alpha-1}g(z)\mathrm{d}z-\int_0^\infty(-z)^{\alpha-1}\mathrm{e}^{2\pi(\alpha-1)i}g(z)\mathrm{d}z\right\}=\sum_{n=0}r_n$$



$$\{\quad\}=2i\sin\pi\alpha\int_0^\infty x^{\alpha-1}g(x)\mathrm{d}x$$

$$\therefore\quad\int_0^\infty x^{\alpha-1}g(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\sum_n r_n$$

5．まず前半を帰謬法で示す．もし内部に零をもたないとすると，$\dfrac{1}{f(z)}$ はCの内部で解析的．したがって最大値の原理により $\dfrac{1}{|f(z)|}$ も $|f(z)|$ もC上で最大となる．ところがC上で $|f(z)|=A_0$（一定）だから，C内の任意の点 z について

$$\frac{1}{|f(z)|}\leqq\frac{1}{A_0}.\qquad |f(z)|\leqq A_0$$

となり，これより $|f(z)|=A_0$．これは $f(z)$ が定数でないことに矛盾．

後半は「イエス」．まず，なめらかな曲線C上では $f'(z)\neq0$ となることを示すことができる．

さて，閉曲線Cをパラメータ t を用いて $z=g(t)$ ($|g'(t)|=1$) と表わすと，この t を用いて，C上で $f(z)=A\mathrm{e}^{i\alpha(t)}$ ($\alpha(t)\in\boldsymbol{R}$) と表わすことができる．このときC上で

$$f'(z)=f(z)\frac{i\alpha'(t)}{g'(t)}$$

となる．Cを1周するとき $f(z)$ の偏角は $2n\pi$ 変化し，$g'(t)$ の偏角は 2π 変化する．また，C上で $f'(z)\neq0$ だから $\alpha'(t)\neq0$ で $\alpha'(t)\in\boldsymbol{R}$ だから $\alpha'(t)$ は定符号（正）．したがって，$f'(z)$ の偏角は $2(n-1)\pi$ 変化することになり，これは $f'(z)$ が $n-1$ 個の零をC内にもつことを意味する．

6．すべての z について $p(z)\neq0$ とすると，$\dfrac{1}{p(z)}$ は全平面で有界．よってリゥヴィルの定理から $\dfrac{1}{p(z)}$ は定数関数となり矛盾．ゆえに $p(z)=0$ となる点 $z=a_1$ が少なくとも1個ある．$p(z)/(z-a_1)$ も（次数が1つ下がった）多項式．同じ議論を定数関数になるまでくり返せば，重複をこめて次数 n に等しい個数の零点の存

在がいえる.

演習問題 8

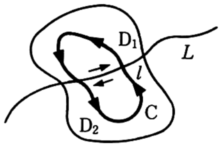
1. (i) は $\log z$ を $z=1$ で, (ii) は $\log z$ を $z=-1$ で展開したもの.

2. 図のように閉曲線をとれば, L の部分の積分は打ち消し合うので

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=0$$

がいえる. モレラの定理から

$$f(z)=\begin{cases} f_1(z) & z\in \mathrm{D}_1 \\ f_2(z) & z\in \mathrm{D}_2 \end{cases}$$



は正則. よって f_2 は f_1 の解析接続.

3. $\overline{\mathrm{D}}$ で $g(z)=\overline{f(z)}$ により関数 $g(z)$ を定義する. このとき, 実軸上の区間 (α, β) 上で $f(z)$ は実数値をとるから, $f(z)=\overline{f(\bar{z})}=g(z)$. また $f(z)=u_1(x, y)+iv_1(x, y)$, $g(z)=u_2(x, y)+iv_2(x, y)$ とおけば, $g(z)$ の定義より $u_2(x, y)=u_1(x, -y)$, $v_2(x, y)=-v_1(x, -y)$. したがって, $f(z)$ がコーシー・リーマンの関係を満たすことから

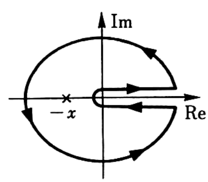
$$\frac{\partial u_1}{\partial x}=\frac{\partial v_1}{\partial y}\Rightarrow\frac{\partial u_2}{\partial x}=-\frac{\partial(-v_2)}{\partial y}=\frac{\partial v_2}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y}=-\frac{\partial v_1}{\partial x}\Rightarrow-\frac{\partial u_2}{\partial y}=-\frac{\partial(-v_2)}{\partial x}=\frac{\partial v_2}{\partial x}$$

より $g(z)$ は $\overline{\mathrm{D}}$ で正則. よって鏡像の原理(§8.2)より, $f(z)$ と $\overline{f(z)}$ は $\mathrm{D}\cup\overline{\mathrm{D}}\cup(\alpha, \beta)$ で正則であり, $\overline{f(\bar{z})}$ は $f(z)$ の解析接続となる.

4. 正の実軸上で $f(x)=x^{-\beta}$ となっていることを示す.

$$\int_0^\infty \frac{t^{-\beta}}{t+x}\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-2\pi\beta i}\int_\infty^0 \frac{t^{-\beta}}{t+x}\mathrm{d}t=2\pi i(-x)^{-\beta}$$



(図の積分路に対して留数定理を適用). これより

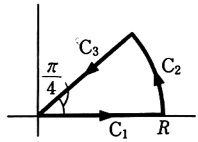
$$\int_0^\infty \frac{t^{-\beta}}{t+x}\mathrm{d}t=\frac{2\pi i}{1-\mathrm{e}^{-2\pi\beta i}}\mathrm{e}^{-\beta\pi i}x^{-\beta}$$

$$\therefore\quad \frac{\sin\pi\beta}{\pi}\int_0^\infty \frac{t^{-\beta}}{t+x}\mathrm{d}t=x^{-\beta}.$$

演習問題 9

1. (a) $\sqrt{a}x=t$ とおくと例6が使える.

（b）　図のような積分路をとると $\int_{C_1+C_2+C_3} e^{-z^2}dz=0$.



$R\to\infty$ で, $\int_{C_1} e^{-z^2}dz=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\int_{C_2} e^{-z^2}dz=0$,

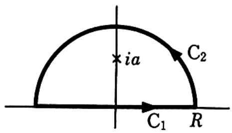
$$\int_{C_3} e^{-z^2}dz=-\int_0^\infty e^{-ix^2}\sqrt{i}\,dx=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\int_0^\infty(\cos x^2+\sin x^2)dx\right.$$

$$\left.+i\int_0^\infty(\cos x^2-\sin x^2)dx\right\}$$ より.

（c）　$\int_{C_1+C_2}\frac{e^{imz}}{z^2+a^2}dz=2\pi i\,\mathrm{Res}(ia)=\frac{\pi}{a}e^{-ma}$,

$$\left|\int_{C_2}\frac{e^{imz}}{z^2+a^2}dz\right|<\int_0^\pi\left|\frac{e^{imR(\cos\theta+i\sin\theta)}}{R^2e^{2i\theta}+a^2}Re^{i\theta}\right|d\theta\leq\frac{\pi R}{R^2-a^2}\to 0\ (R\to\infty),$$

$$\int_{C_1}\frac{e^{imz}}{z^2+a^2}dz=2\int_0^\infty\frac{\cos mx}{x^2+a^2}dx$$ より.



（d）　（c）を m で微分せよ.

2.（a）　$e^{i\theta}=z$ とすると

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}d\theta=\frac{i}{2b}\oint_C\frac{(z-z^{-1})^2}{z^2+2cz+1}dz$$ （$c=a/b$, C は単位円を反時計まわり）

$$=\frac{i}{2b}\oint_C\left\{1-\frac{2c}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{2\sqrt{c^2-1}}{z+c-\sqrt{c^2-1}}-\frac{2\sqrt{c^2-1}}{z+c+\sqrt{c^2-1}}\right\}dz$$

$$=\frac{2\pi}{b}\left(\frac{a}{b}-\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2-1}\right)$$

(b)　$$\int_0^\pi\frac{\cos k\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\cos k\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta$$

$$=\frac{1}{4i}\oint_C\frac{z^k+z^{-k}}{1-a(z+z^{-1})+a^2}\frac{dz}{z}$$ （C：反時計まわりの単位円）

$$=\frac{1}{4i}\oint_C\frac{z^{2k}+1}{z^k(1-az)(z-a)}dz=\frac{1}{4i(1-a^2)}\oint_C\left\{(a-a^{-1})z^{k-2}+\cdots\cdots\right.$$

$$\left.+(a^k-a^{-k})\frac{1}{z}+\cdots\cdots+\frac{1+a^{2k}}{z^k(z-a)}+\frac{1+a^{-2k}}{z^k(z-a^{-1})}\right\}dz$$

$$=\pi a^k/(1-a^2)\quad(|a|<1)\,;\ -\pi a^{-k}/(1-a^2)\quad(|a|>1).$$

（c）　$(b-x)/(x-a)=u$ とおくと

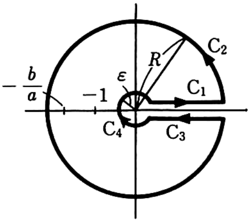
$$\int_a^b\frac{1}{x}\left(\frac{b-x}{x-a}\right)^{-\alpha}dx=\frac{b-a}{a}\int_0^\infty\frac{u^{-\alpha}}{\left(u+\frac{b}{a}\right)(u+1)}du.$$

複素平面で図のような積分路を考えると

$$\oint_{C_1+\cdots+C_4}\frac{z^{-\alpha}}{\left(z+\dfrac{b}{a}\right)(z+1)}dz$$

$$=2\pi i\left\{\mathrm{Res}\left(-\frac{b}{a}\right)+\mathrm{Res}(-1)\right\}$$

$$=\frac{e^{-i\pi\alpha}}{1-\dfrac{b}{a}}\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^{-\alpha}-1\right\}$$



$\epsilon\to 0$，$R\to\infty$ で $\int_{C_2}$，$\int_{C_4}\to 0$，$\int_{C_3}=-e^{-2\pi i\alpha}\int_{C_1}$ より，答は

$$\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\left\{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{-\alpha}\right\}$$

3．式(9.17)より，母関数 $F_+(z)=-F_-(z)=1/2(z-a)$ から得られる．

4．母関数どうしも同様の関係となる．

5．$F_+(x+i\epsilon)-F_-(x-i\epsilon)$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2i\epsilon g(t)}{(t-x)^2+\epsilon^2}dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(x+\epsilon s)}{s^2+1}ds\to g(x)\quad(\epsilon\to 0)$$

6．式(5.12)を半径 R の円周上に拡張し，$r\to R$ とせよ．

7．$(1-z^2)\dfrac{d^2P_\nu}{dz^2}-2z\dfrac{dP_\nu}{dz}+\nu(\nu+1)P_\nu=\dfrac{\nu+1}{2\pi i}\displaystyle\oint_D\frac{d}{dt}\left\{\frac{(t^2-1)^{\nu+1}}{(t-z)^{\nu+2}}\right\}dt$

ν が整数でないときも，D の積分路上で｛　｝内の関数は1価．

8．グルサの公式(5.17)を使えば前半が示せる．後半はまず

$\displaystyle\int_{-1}^{1}x^mP_n(x)dx=0\quad(m=0,1,\cdots,n-1)$ を部分積分で示す．

$m=n$ のときは

$\displaystyle\int_{-1}^{1}\{P_n(x)\}^2dx=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx=\frac{2(2n)!}{(n!)^2}\,\frac{\Gamma(n+1)^2}{\Gamma(2n+2)}$ となる．

9．$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}P_n(z)\zeta^n=\frac{1}{2\pi i}\int_C dt\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta^n(t^2-1)^n}{2^n(t-z)^{n+1}}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{dt}{t-z-\dfrac{\zeta}{2}(t^2-1)}$ より．

(C は z を囲む反時計まわりの閉曲線)．

演習問題 10

1．式(10.20)で，$z=\pi/2$ とおく．

2．(a)　$\sec z$ の極は $z=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi=a_n$ で，留数は $r_n=\displaystyle\lim_{z\to a_n}(z-a_n)\sec z=(-1)^{n+1}$．

式(10.8)より，$\sec 0=1$ を用いて

$$\sec z=1+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^{n+1}\left\{\frac{1}{z-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}+\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right\}$$

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}=\sum_{n=0}^{+\infty}+\sum_{n=-1}^{-\infty}$ とし，後者において $n=-n'-1$ とおき換え計算すると

$$=1+\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{2}}+2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2-z^2} \tag{1}$$

式(10.9)に $z=\dfrac{\pi}{4}$ を代入した式を使うと，(1)の第1，2項は打ち消し合う．

(b)　$\csc z-\dfrac{1}{z}$ の極は $z=n\pi$ で，留数は $(-1)^n$．また $\lim_{z\to 0}\left(\csc z-\dfrac{1}{z}\right)=0$．式(10.8)より，$0+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}'(-1)^n\left(\dfrac{1}{z-n\pi}+\dfrac{1}{n\pi}\right)$ を変形せよ．

(c)　$\tan z$ の極は $z=\left(n+\dfrac{1}{2}a\right)$，留数は -1，$\tan 0=0$．よって

$$\tan z=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)\left\{\frac{1}{z-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}+\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right\}.$$

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}$ に(a)と同じ置換をほどこせ．

(d)　$\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$ の極は $z=2n\pi i$ で留数は1．$\lim_{z\to 0}\left(\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}\right)=-\dfrac{1}{2}$．よって

$$-\frac{1}{2}+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}'\left(\frac{1}{z-2n\pi i}+\frac{1}{2n\pi i}\right)=-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2+4\pi^2n^2}.$$

(e)　(d)において両辺を z で微分し，$z=2iz'$ とおき換える．

3．$P(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{z}{a_k}\right)e^{\frac{z}{a_k}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_k}\right)^2+\cdots+\frac{1}{m-1}\left(\frac{z}{a_k}\right)^{m-1}}$ とおく．

$$S(z)\equiv\ln P(z)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{z}{a_k}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{z}{a_k}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_k}\right)^2+\cdots\cdots+\frac{1}{m-1}\left(\frac{z}{a_k}\right)^{m-1}\right\}$$

$$=-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}\frac{1}{l}\left(\frac{z}{a_k}\right)^l$$

$$\left|\sum_{l=m}^{\infty}\frac{1}{l}\left(\frac{z}{a_k}\right)^l\right|\leqq\left|\frac{z}{a_k}\right|^m\left\{\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}\left|\frac{z}{a_k}\right|+\frac{1}{m+2}\left|\frac{z}{a_k}\right|^2+\cdots\cdots\right\}$$

あらゆる z に対し $a_k > N \geqq 2|z|$ を満たす $k\,(>k_0)$ がとれるから

$$\left|\sum_{l=m}^{\infty}\frac{1}{l}\left(\frac{z}{a_k}\right)^l\right| \leqq \left|\frac{z}{a_k}\right|^m \cdot \frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots\right) = \frac{2}{m}\left|\frac{z}{a_k}\right|^m$$

$$\therefore\ \sum_{k>k_0}^{\infty}\left|\sum_{l=m}^{\infty}\frac{1}{l}\left(\frac{z}{a_k}\right)^l\right| \leqq \frac{2^{1-m}}{m}N^m\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|a_k|^m} < +\infty$$

よって z の有界領域で一様絶対収束する．125 ページの議論により $z=a_k$ のみで零となる．

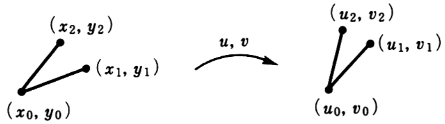
4．$S(z)=\ln P(z)$ を微分して，$P'(z)=P(z)\cdot S'(z)$．第 5 章の系 1(c) により，項別に微分した級数も一様収束し，$S'(z)$ を与える．$S'(z)=\sum_{l=1}^{\infty}u_l'(z)/u_l(z)$．

演習問題 11

1．$S=\frac{1}{2}|(x_1-x_0)(y_2-y_0)-(x_2-x_0)(y_1-y_0)|$．他方 $(u_i, v_i)=(u_0, v_0)$ $+(u_x, v_x)(x_i-x_0)+(u_y, v_y)(y_i-y_0)$，$(i=1, 2)$ より u，v 面の面積は

$$S'=\frac{1}{2}|(u_1-u_0)(v_2-v_0)-(u_2-u_0)(v_1-v_0)|$$

$$=\frac{1}{2}|(u_xv_y-v_xu_y)\{(x_1-x_0)(y_2-y_0)-(x_2-x_0)(y_1-y_0)\}| = \begin{vmatrix} u_x u_y \\ v_x v_y \end{vmatrix} S$$



2．$w=\ln(z+\sqrt{z^2-1})$

3．1 次分数写像 $w=\lambda+\dfrac{\mu}{z+\nu}$ により，円 C：$|z-z_0|=r$ は円 γ：$|w-w_0|=R$ に写る．ただし，中心 $w_0=\lambda+\dfrac{(\nu^*+z_0^*)\mu}{|\nu+z_0|^2-r^2}(\neq w(z_0))$，$R=\dfrac{r|\mu|}{||\nu+z_0|^2-r^2|}$．円 C に対し鏡像の位置にある z_1，z_2 を $z_2-z_0=\alpha(z_1-z_0)$，$\alpha>0$ とおくと，$z_1=z_0+\dfrac{r}{\sqrt{\alpha}}$ $e^{i\theta}$，$z_2=z_0+r\sqrt{\alpha}\,e^{i\theta}$．$z_1$，$z_2$ の像を w_1，w_2 とすると

$$\frac{w_2-w_0}{w_1-w_0}=\frac{\left|z_0+\nu+\dfrac{r}{\sqrt{\alpha}}e^{i\theta}\right|^2}{|z_0+\nu+r\sqrt{\alpha}\,e^{i\theta}|^2},\ |w_2-w_0||w_1-w_0|=R^2 \text{ が成立．}$$

4．式(11.31)より $\dfrac{(z-\bar{z}_0)(\bar{z}-z_0)}{(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)}=\alpha^2$．これを変形して

$$\left(z-\frac{\bar{z}_0-\alpha^2 z_0}{1-\alpha^2}\right)\left(\bar{z}-\frac{z_0-\alpha^2\bar{z}_0}{1-\alpha^2}\right)=\left|z-\frac{\bar{z}_0-\alpha^2 z_0}{1-\alpha^2}\right|^2=\frac{\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2}|z_0-\bar{z}_0|^2$$

は円の方程式．また式(11.32)より

$\dfrac{z-\bar{z}_0}{z-z_0}=re^{i\beta}$，複素共役から $\dfrac{\bar{z}-z_0}{\bar{z}-\bar{z}_0}=re^{-i\beta}$．比をとって，

$\dfrac{z-\bar{z}_0}{z-z_0}=e^{2i\beta}\dfrac{z-z_0}{\bar{z}-\bar{z}_0}$．変形して $\left|z-r_0\dfrac{\sin(\beta+\theta_0)}{\sin\beta}\right|^2=\dfrac{r^2}{\sin^2\beta}\sin^2\theta$．

ただし，$z_0=r_0e^{i\theta_0}$．

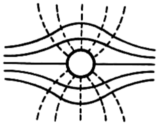
5．$f(r,\theta)=\left(r-\dfrac{R^2}{r}\right)\sin\theta-i\left(r+\dfrac{R^2}{r}\right)\cos\theta$．

$\phi=\left(r-\dfrac{R^2}{r}\right)\sin\theta$：等ポテンシャル線．

$\psi=-\left(r+\dfrac{R^2}{r}\right)\cos\theta$：電気力線．

$E_x=-\dfrac{\partial\phi}{\partial x}=-\dfrac{2R^2xy}{(x^2+y^2)^2}$，

$E_y=-\dfrac{\partial\phi}{\partial y}=1+R^2\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$．



$r\to\infty$ で $E_x\to 0$，$E_y\to 1$．

無限遠で一様な電場内に半径 R の電導性の円柱をおいたときにできる電場．

演習問題 12

1．$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt$，$(t/n=s)$

$$=\lim_{n\to\infty}n^z\int_0^1(1-s)^n s^{z-1}ds=\lim_{n\to\infty}n^z B(n+1,z)=\lim_{n\to\infty}n^z\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(z)}{\Gamma(n+1+z)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}n^z\frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^z}{z(1+z)\cdots\left(1+\dfrac{z}{n}\right)}$$

2．$|\Gamma(iy)|^2=\dfrac{1}{y^2}\prod_{k=1}^{\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^{iy}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^{-iy}\Big/\left(1+\dfrac{iy}{k}\right)\left(1-\dfrac{iy}{k}\right)\right]$

$$=1\Big/\left[y^2\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{y^2}{k^2}\right)\right]=\pi/[y\sinh\pi y]$$

3．$|\Gamma(x+iy)|\leqq\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt=\Gamma(x)$ である．

4．テイラーの定理を適用し，$f^{(n)}(0)=\Gamma(\alpha+1)/\Gamma(\alpha-n+1)$ が使える．

5．$\gamma=\int_0^\infty e^{-t}\left(\dfrac{1}{1-e^{-t}}-\dfrac{1}{t}\right)dt$　　(第1項で $1-e^{-t}\to t$ とおいてのち変形)

$$=\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}dt-\int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t}dt \quad (部分積分する)=-\int_0^\infty e^{-t}\ln t\,dt$$

6. (i) $\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty} \quad n^z/z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\frac{z}{n}\right)$

の対数をとって微分せよ．さらに γ の定義(12.10)を使う．

(ii) (i)の表現と $1/[k(k+1)]=1/k-1/(k+1)$ を使う．

(iii) $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ の対数をとる．

(iv) (ii), (iii)を使う．

7. $\Gamma(p)\Gamma(q)$ の積分表現から式(12.22)の積分因子を導いてみよ．

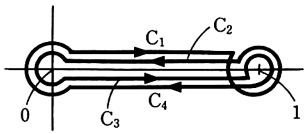
8. $\int_{C_1+C_2+C_3+C_4} t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt=I$ とする（$t=0,1$ のまわりの小円の寄与は消える．）

$\int_{C_2}=-e^{2\pi i(q-1)}\int_{C_1}$, $\int_{C_3}=-e^{2\pi i(p-1)}\int_{C_2}=e^{2\pi i(p+q)}\int_{C_1}$,

$\int_{C_4}=-e^{-2\pi i(q-1)}\int_{C_3}=-e^{2\pi ip}\int_{C1}$

$\therefore \quad I=(1-e^{2\pi iq}+e^{2\pi i(p+q)}-e^{2\pi ip})\int_{C_1}$

$=-4e^{\pi i(p+q)}\sin\pi p\sin\pi qB(p,q)$ より．



9. 式(12.27)から，(12.27)に $\frac{1}{2^z}$ をかけたものをひく．さらに，得られた式から $\frac{1}{3^z}$ をかけたものをひく．これをくり返す．絶対収束性は $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^z}\right)$ $(\mathrm{Re}\,z>1)$ に対し成立する．

10. $$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2n^{2z+1/2}}{[z(z+1)\cdot\cdots\cdot(z+n)][(z+1/2)(z+3/2)\cdot\cdots\cdot(z+n+1/2)]}$$

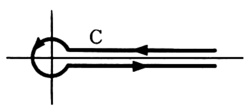
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2z+1/2}(n!)^2 2^{2n+2}}{2z(2z+1)\cdot\cdots\cdot(2z+2n)(2z+2n+1)}$$

$$=2^{-2z}\Gamma(2z)\cdot c$$

ただし，$c=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1/2}(n!)^2\,2^{2n+2}}{(2n+1)!}$．$z=\frac{1}{2}$ 代入して $c=2\sqrt{\pi}$．

11. (a) $v'(t)=-v(t)$

(b) $\Gamma(z)=\int_c Ae^{-t}t^{z-1}dt$, $A=\frac{1}{e^{2\pi iz}-1}$



12. $$F(\alpha,\beta,\gamma;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n)}z^n$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\Gamma(\alpha+n)B(\beta+n,\ \gamma-\beta)z^n$$

$$=-\frac{\Gamma(\gamma)\pi e^{-i\pi\gamma}}{4\,\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(1-\alpha)\sin\pi\alpha\sin\pi\beta\sin\pi(\gamma-\beta)}$$

$$\int_c \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1-\alpha)}{n!\,\Gamma(1-\alpha-n)}(-uz)^n u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}\mathrm{d}u$$

$$=-\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(1-\beta)e^{-i\pi\gamma}}{\Gamma(\gamma-\beta)4\,\pi\sin\pi(\gamma-\beta)}\int_c u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-uz)^{-\alpha}\mathrm{d}u$$

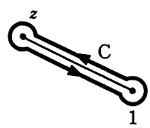
($\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\pi/\sin\pi\alpha$，問題 4.の式より)．

また後半は，$B(\beta+n,\gamma-\beta)=\int_0^1 u^{\beta+d-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}\mathrm{d}u$ を使い

$$F(\alpha,\beta,\gamma\,;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\Gamma(\alpha+n)\int_0^1 u^{\beta+n-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}\mathrm{d}u$$

を変形せよ．

13．積分路を図のようにとると，$-1<\mathrm{Re}(\nu)<0$ より $t=z$ 中心の小円での積分は消えるので



$$P_\nu(z)=\frac{1}{2^{\nu+1}\pi i}\left(\int_{1+i\epsilon}^{z+i\epsilon}+\int_{z-i\epsilon}^{1-i\epsilon}\right)\frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}\mathrm{d}t$$

$t=1+(z-1)u$ とおくと

$$\to\frac{e^{i\nu\pi}-e^{-i\nu\pi}}{2\,\pi i}\int_0^1 u^\nu(1-u)^{-\nu-1}\left(1-u\frac{1-z}{2}\right)^\nu\mathrm{d}u=F\left(-\nu,\ \nu+1,\ 1\,;\frac{1-z}{2}\right).$$

演習問題 13

1．$$R=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\lambda+m+1)2^{2m}}\cdot\frac{(m+1)!\,\Gamma(\lambda+m+2)2^{2m+2}}{(-1)^{m+1}}\right|$$

$$=\lim_{m\to\infty}|4(m+1)(\lambda+m+1)|=\infty$$

2．ベッセル方程式(13.1)を λ で微分して

$$z^2\partial_\lambda J''_\lambda+z\partial_\lambda J_\lambda+(z^2-\lambda^2)\partial_\lambda J_\lambda-2\,\lambda J_\lambda=0$$

λ を $-\lambda$ でおき換えた式に $(-1)^n$ をかけて上式と加えて，$\lambda\to n$ せよ．

3．$$\frac{1}{z^\lambda}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z^\lambda J_\lambda(z)]=\frac{\lambda}{z}J_\lambda(z)+J_\lambda'(z)$$

$$-z^\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z^{-\lambda}J_\lambda(z)]=\frac{\lambda}{z}J_\lambda(z)-J_\lambda'(z)$$

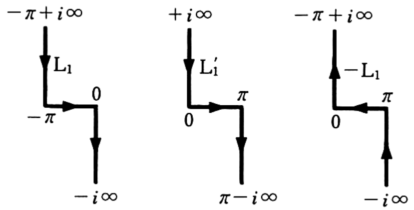
式(13.11)の上式と下式の和，差をとれ．

4．$H_{-\lambda}{}^{(1)}=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{L_1}e^{-iz\sin\zeta-i\lambda\zeta}\mathrm{d}\zeta$．$\tau=\zeta+\pi$ とおくと，$H_{-\lambda}{}^{(1)}=\dfrac{e^{i\lambda\pi}}{\pi}\displaystyle\int_{L_1'}e^{iz\sin\tau-i\lambda\tau}\mathrm{d}\tau$，

さらに $\tau=-t$ とおいて $=-\dfrac{e^{i\lambda\pi}}{\pi}\displaystyle\int_{-L_1} e^{-iz\sin t+i\lambda t}dt$

$$=\frac{e^{i\lambda\pi}}{\pi}\int_{L_1} e^{-iz\sin\zeta+i\lambda\zeta}d\zeta$$

$$=e^{i\lambda\pi}H_\lambda^{(1)}(z)$$



$H_{-\lambda}^{(2)}$ も同様.

5. 式(13.23 a)より

$$J_\lambda=\frac{1}{2}(H_\lambda^{(1)}+H_\lambda^{(2)})$$

λ を $-\lambda$ でおき換えて式(13.24)を使うと $J_{-\lambda}=\dfrac{1}{2}(e^{i\lambda\pi}H_\lambda^{(1)}+e^{-i\lambda\pi}H_\lambda^{(2)})$.
これらの式を $H_\lambda^{(1)}$, $H_\lambda^{(2)}$ について解き，式(13.23 b)に代入する.

6. 積分路 U が実軸を 1 の右側で切る点を A とし，そこで $\arg(\zeta-1)=0$, $\arg(\zeta+1)=0$ とする. U を 1 周の後には, $\arg(\zeta-1)=2\pi$, $\arg(\zeta+1)=-2\pi$. したがって 1 周の前後とも $\arg(\zeta^2-1)=0$, $\arg[v(\zeta)]=0$.

7. (a)　式(12.23)より $\dfrac{1}{\Gamma(\lambda+m+1)}=\dfrac{B\left(\lambda+\frac{1}{2},\ m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}$

式(12.6)で $n=m-1$, $z=\dfrac{1}{2}$ とすると

$$\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)=\left(m-\frac{1}{2}\right)\cdot\cdots\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{(2m-1)!!}{2^m}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(2m)!}{2^{2m}m!}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

これと式(12.18)を使う.

(b)　$t=\sin^2\theta$ とおき, $(1-t)^m=\cos^{2m}\theta$, $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m z^{2m}(\cos\theta)^{2m}}{(2m)!}=\cos(z\cos\theta)$ を使う.

演習問題 14

1. 部分積分を繰り返す.

2. $\displaystyle\int_0^1 e^{ixt}t^{-\frac{1}{2}}dt=\left(\int_0^\infty-\int_1^\infty\right)e^{ixt}t^{-1/2}dt$

1 番目の積分はフレネル積分より $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}(1+i)$. 2 番目は部分積分をくり返して

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+i)+\mathrm{e}^{ix}\left(\frac{1}{ix}-\frac{1}{2x^2}-\frac{1\cdot3}{2^2}\frac{1}{ix^3}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3}\frac{1}{x^4}-\cdots\cdot\right)$$

3．$y=\mathrm{e}^{ix}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{x^n}$ とすると，係数は

$$a_{n-1}=\frac{1}{2i(n-1)}(n^2-3n+3)a_{n-2}\quad(n=2,3,\cdots\cdot)$$ で決まる．

$y=\mathrm{e}^{-ix}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{x_n}$ のときは $a_{n-1}=\frac{-1}{2i(n-1)}(n^2-3n+3)a_{n-2}$.

4．コーシー・リーマンの関係式を使え．

5．$f(x)=g(\zeta_0)\mathrm{e}^{xh(\zeta_0)}\mathrm{e}^{i\pi/2}\sqrt{2\pi/xh''(\zeta_0)}$

$h''(\zeta_0)=0$，$h'''(\zeta_0)\neq0$ の場合は，$\frac{1}{6}\zeta'''(\zeta_0)=a\mathrm{e}^{-i\alpha}$，$\zeta-\zeta_0=r\mathrm{e}^{i\theta}$ とおくと

$\mathrm{Re}\,h(\zeta)=\mathrm{Re}\,h(\zeta_0)+ar^3\cos(3\theta-\alpha)$.

$\mathrm{Re}\,h(\zeta)$ の山は　$\theta=\frac{\alpha}{3}$，$\frac{\alpha}{3}+\frac{2}{3}\pi$，$\frac{\alpha}{3}+\frac{4}{3}\pi$，

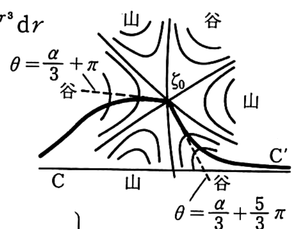
谷は　$\theta=\frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{3}$，$\frac{\alpha}{3}+\pi$，$\frac{\alpha}{3}+\frac{5}{3}\pi$.

たとえば，C が実軸 $(-\infty,\infty)$ で，図のように変形できたとすれば

$$f(x)\simeq\left(\int_{\infty}^{0}\mathrm{e}^{i\left(\frac{\alpha}{3}+\pi\right)}+\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{i\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{5}{3}\pi\right)}\right)\mathrm{e}^{xh(\zeta_0)}g(\zeta_0)\mathrm{e}^{-axr^3}\mathrm{d}r$$

$$=\mathrm{e}^{i\frac{\alpha}{3}}(\mathrm{e}^{i\frac{5}{3}\pi}-\mathrm{e}^{-i\pi})\mathrm{e}^{xh(\zeta_0)}g(\zeta_0)\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-axr^3}\mathrm{d}r$$

$$=(\mathrm{e}^{i\frac{5}{3}\pi}+1)\mathrm{e}^{xh(\zeta_0)}g(\zeta_0)\frac{2^{\frac{1}{3}}3^{-\frac{2}{3}}}{\{xh'''(\zeta_0)\}^{\frac{1}{3}}}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$$



6．$I_n(z)\simeq\sqrt{\frac{1}{2\pi z}}\mathrm{e}^{z}\left\{1-\frac{4n^2-1}{1!8z}+\frac{(4n^2-1)(4n^2-3^2)}{2!(8z)^2}-\cdots\cdot\right\}$

7．$g(\zeta)=\zeta+\frac{1}{3x}\zeta^3$ とおくと，$x=-|x|\to-\infty$ のとき

$A_i=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{ixg(\zeta)}\mathrm{d}\zeta$ は $\zeta=\pm\sqrt{|x|}$ にて停留点をもち，その近傍で $g(\zeta)$ は

$g(\zeta)\simeq\frac{2}{3}\sqrt{|x|}\mp\frac{1}{\sqrt{|x|}}(\zeta-\zeta_0)^2$ と近似される．よって積分は

$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{ix\left(\pm\frac{2}{3}\sqrt{|x|}\right)}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{ix\left(\mp\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right)t^2}\mathrm{d}t$ の和となる．a が 0 でない実数のとき

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax^2} dx = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\pi}{2a}}(1+i), & a>0 \\ \sqrt{\dfrac{\pi}{2a}}(1-i), & a<0 \end{cases}$$ を用いると

$$A_i \simeq \frac{1}{2}\left[e^{-i\frac{2}{3}|x|^{\frac{3}{2}}}(1+i)+e^{i\frac{2}{3}|x|^{\frac{3}{2}}}(1-i)\right]\sqrt{\frac{\pi}{2\sqrt{|x|}}}$$

$$=\sqrt{\pi}|x|^{-\frac{1}{4}}\sin\left[\frac{2}{3}|x|^{\frac{3}{2}}+\frac{\pi}{4}\right].$$

8. $\sin 2\lambda\Theta=\sum_{m=0}^{\infty} a_m \sin^m\Theta$ とおいてこれを2回微分すると

$$\begin{cases} a_{m+2}=\dfrac{m^2-4\lambda^2}{(m+2)(m+1)}a_m, & m=1,\ 3,\ 5,\cdots\cdots \\ a_m=0 & ,\ m=0,\ 2,\ 4,\ 6,\cdots\cdots \end{cases}$$

を得る．$m=2n+1$ とおいて

$$a_{2n+1}=\frac{4\lambda^2-(2n-1)^2}{(2n+1)2n}(-1)a_{2n-1}$$

$$=\frac{\{4\lambda^2-(2n-1)^2\}\cdot\cdots\cdots\cdot\{4\lambda^2-1^2\}}{(2n+1)!}(-1)^n a_1$$

$$=\frac{2^{2m}\Gamma(1/2+\lambda+n)}{\Gamma(1/2+\lambda-n)}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}a_1.$$

また，$\Theta\ll 1$ の近似式より，$a_1=2\lambda$.

9. ハンケル関数の漸近展開(14.22)，(14.23)を使って示せる．

あとがき

複素関数論については従来多くの名著が出版されている．本書は講義ノートを土台にして，物理学のための数学入門の立場から書かれ，可能なかぎり他の文献を参照せずに理解できるよう努めたが，執筆に際しいくつかの書物を参考にしている．ここにそれらの書名を挙げ，その著者に謝意を表するとともに，読者の参考にも資したいと思う．

1) 高木貞治：解析概論，岩波書店(1961)
2) スミルノフ：高等数学教程 6 (III 巻二部)，共立出版(1958)
3) G. F. Carrier, M. Krook & C. E. Pearson: Functions of a complex variable, McGraw-Hill(1966)
4) E. C. Titchmarsh: The Theory of Functions, Oxford University Press (1932)
5) 犬井鉄郎，石津武彦：複素関数論，東京大学出版会(1966)
6) 今井　功：応用超関数論，サイエンス社(1983)
7) C. Caratheodory: Conformal Representation, Cambridge University Press (1932)
8) クーランおよびヒルベルト(斎藤ほか訳)：数理物理学の方法 2 (第 7 章)，東京図書(1959)
9) G. B. Witham: Linear and Nonlinear Waves (Chap. 13), John Wiley & Sons(1974)

以上の 1)～5) は本書全般で参考にした．

本書にはコンピュータ作図による図が掲載されている．それには TOP Drawer および VAX(東京大学理学部)ならびに Mathematica(S. Wolfran 著)が使われた．巻末に示した演習問題の略解は，梅木　誠，服部裕司，藤谷洋

平の三氏の協力を得て作成された．ここに感謝の意を表する次第であるが，しかし責任は全面的に著者の方にあることはいうまでもない．

索　引

ラ

リ

ル

レ，ロ

ワ

著者略歴

有馬　朗人（ありま　あきと）

1953年　東京大学理学部物理学科卒業

専　攻　原子核理論

現　在　前東京大学学長・理化学研究所前理事長　理学博士

神部　勉（かんべ　つとむ）

1962年　東京大学理学部物理学科卒業

専　攻　流体物理学

現　在　前東京大学大学院理学系研究科教授，
　　　　南開数学研究所（中国）客員教授，理学博士

物理のための数学入門

複素関数論

1991年12月1日　初版1刷発行
2012年9月15日　初版10刷発行

著者　有馬朗人
　　　神部　勉　© 1991

発行　**共立出版株式会社**／南條光章
東京都文京区小日向 4-6-19
電話東京 3947 局 2511 番（代表）
〒112-8700／振替口座 00110-2-57035 番
URL http://www.kyoritsu-pub.co.jp/

印刷　真興社
製本　協栄製本

検印廃止
NDC 420

社団法人
自然科学書協会
会　員

ISBN 978-4-320-03286-6

Printed in Japan